

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1 (2 điểm). Cho hai biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{x}-1}$ và $B = \frac{x+2\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}-2} - \frac{x+1}{x-1}$ với $x \geq 0; x \neq 1$.

a) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$.

b) Tìm tất cả các giá trị của x sao cho $A + \frac{1}{B} \leq 4$.

Câu 2 (2 điểm). Cho hệ phương trình $\begin{cases} x - my = 5 - 3m \\ mx - y = 2 \end{cases}$ (m là tham số).

Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện $\frac{5}{x} + 4 = \frac{3}{y}$.

Câu 3 (2 điểm). Một kho hàng nhập gạo (trong kho chưa có gạo) trong 3 ngày liên tiếp và mỗi ngày (kể từ ngày thứ hai) đều nhập một lượng gạo bằng 150% lượng gạo đã nhập vào kho trong ngày trước đó. Từ ngày thứ tư kho ngừng nhập và mỗi ngày kho lại xuất một lượng gạo bằng $\frac{1}{10}$ lượng gạo trong kho ở ngày trước đó. Hãy tính lượng gạo kho hàng nhập ngày thứ nhất trong mỗi trường hợp sau:

a) Ngày thứ ba, sau khi nhập xong thì trong kho có 380 tấn gạo.

b) Số gạo đã xuất trong ngày thứ năm là 342 tấn.

Câu 4 (3 điểm). Từ điểm M nằm ngoài đường tròn (O) kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AB với OM ; E là giao điểm của đoạn thẳng MO với (O) .

a) Chứng minh E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB .

b) Gọi I là trung điểm của MH . Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm K (K khác A). Tính số đo góc AKH .

c) Chứng minh KE là tia phân giác của góc MKH .

Câu 5 (1 điểm). Xét các số thực a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn $1 \leq a, b, c \leq 2$.

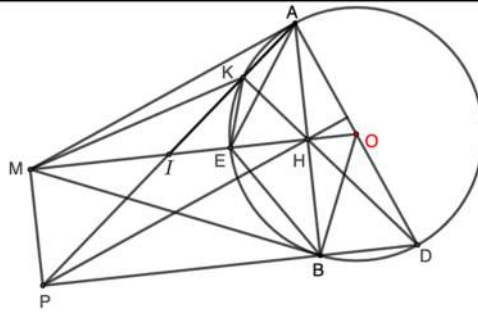
Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$.

.....Hết.....

**ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM 2023 – LẦN 1
BÀI THI MÔN 2: Môn Toán chung**

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1	a		1,0
		$B = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)} - \frac{x+1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{x+1}{x-1}$	0,5
		$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1) - x - 1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$	0,5
1	b		1
		$A + \frac{1}{B} \leq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}-1} + \sqrt{x} + 1 \leq 4$	0,25
		$\Leftrightarrow \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{\sqrt{x}-1} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-1} \leq 0$	0,25
		Trường hợp 1. $\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-1} = 0 \Leftrightarrow x = 4$	0,25
		Trường hợp 2. $\frac{(\sqrt{x}-2)^2}{\sqrt{x}-1} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-2 \neq 0 \\ \sqrt{x}-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ 0 \leq x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1.$ Vậy $0 \leq x < 1$ hoặc $x = 4$	0,25
2			2,0
		$\begin{cases} x - my = 5 - 3m & (1) \\ mx - y = 2 & (2) \end{cases}$ Từ (1) $\Rightarrow x = my + 5 - 3m$, thay vào (2) ta được $m(my + 5 - 3m) - y = 2$	0,25
		$\Leftrightarrow y(m^2 - 1) = 3m^2 - 5m + 2 \Leftrightarrow y(m-1)(m+1) = (m-1)(3m-2) \quad (3)$	0,25
		Để hệ có nghiệm duy nhất thì phương trình (3) phải có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (m-1)(m+1) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$	0,25

		Với điều kiện $m \neq \pm 1$ thì hệ có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{5}{m+1}; \frac{3m-2}{m+1} \right)$	0,25
		Với điều kiện $m \neq \pm 1, m \neq \frac{2}{3}$ thì $\frac{5}{x} + 4 = \frac{3}{y} \Leftrightarrow m+1+4 = \frac{3(m+1)}{3m-2}$	0,25
		$\Leftrightarrow 3m^2 + 10m - 13 = 0$	0,25
		$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{-13}{3} \end{cases}$	0,25
		Đối chiếu với điều kiện, ta tìm được $m = \frac{-13}{3}$	0,25
3			2,0
	a		1,0
		Gọi x (tấn) là lượng gạo nhập vào kho trong ngày thứ nhất. Khi đó lượng gạo nhập vào kho trong các ngày thứ hai, thứ ba lần lượt là $150\%.x = \frac{3}{2}x; 150\% \left(\frac{3}{2}x \right) = \frac{9}{4}x$	0,5
		Tổng lượng gạo nhập vào kho sau ngày thứ ba là $x + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x = \frac{19}{4}x$. Theo giả thiết ta có phương trình $\frac{19}{4}x = 380 \Leftrightarrow x = 80$ Vậy, ngày thứ nhất kho hàng đã nhập 80 tấn gạo	0,5
	b		1,0
		Lượng gạo đã xuất trong các ngày thứ tư và thứ năm lần lượt là $\frac{1}{10} \left(\frac{19}{4}x \right); \frac{1}{10} \left[\frac{9}{10} \left(\frac{19}{4}x \right) \right] = \frac{171}{400}x$	0,5
		Theo giả thiết ta có $\frac{171}{400}x = 342 \Leftrightarrow x = 800$ Vậy, ngày thứ nhất kho hàng đã nhập 800 tấn gạo	0,5
4		Cách 1	
	a		1,0



Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau thì MH là phân giác của góc AMB và MO là đường trung trực của AB , suy ra $EA = EB$ hay tam giác EAB cân tại E , từ đó dẫn đến $\widehat{EAB} = \widehat{EBA}$.

Ta có $\widehat{EBA} = \widehat{MAE} \Rightarrow \widehat{EAB} = \widehat{MAE}$, suy ra AE là phân giác của góc MAB .
 Vậy E là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB .

b

Gọi P đối xứng với A qua I . Tứ giác $AMPH$ là hình bình hành, từ đó suy ra $MP \parallel AH; MP = AH \Rightarrow MP \parallel HB; MP = HB$. Vậy tứ giác $MPBH$ là hình bình hành. Kết hợp với $\widehat{MHB} = 90^\circ$ ta được $MPBH$ là hình chữ nhật.

Gọi D là giao điểm thứ hai của PB và (O) (D khác B). Vì góc ABD vuông nên AD là đường kính của (O) . Vậy DK vuông góc với KA hay DK vuông góc với AP (1)
 Tam giác ADP có $AB \perp PD; PH \perp AD$ (vì $PH \parallel AM$). Do đó H là trực tâm của tam giác ADP . Vậy $DH \perp AP$ (2)
 Từ (1), (2) suy ra ba điểm D, H, K thẳng hàng. Vậy góc AKH bằng 90° .

c

Ta chứng minh được $HM.HO = HA.HB$ và $HA.HB = HK.HD$.
 Từ đó suy ra $HM.HO = HK.HD$

$$\Rightarrow \triangle HKM \sim \triangle HOD \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \widehat{MKH} = \widehat{DOH}$$

Lại có $\widehat{EKD} = \frac{1}{2} \widehat{EOD} \Rightarrow \widehat{EKD} = \frac{1}{2} \widehat{MKH}$ hay KE là tia phân giác của góc MKH .

5

Giả sử b nằm giữa a và c . Ta có

$$(b-c)(b^2-a^2) \leq 0 \Rightarrow b^3 + a^2c \leq b^2c + ba^2 \Rightarrow \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{b} \leq b + \frac{a^2}{c}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \leq \frac{a^2}{c} + b + \frac{c^2}{a} = \frac{(a+c)(a^2-ac+c^2)}{ac} + b$$

0,25

	<p>Vì $1 \leq a, c \leq 2$ nên $a \leq 2c; c \leq 2a$ suy ra $(a - 2c)(2a - c) \leq 0$, dẫn đến</p> $\frac{a^2 + c^2 - ac}{ac} \leq \frac{3}{2}$ <p>Do đó $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \leq \frac{3}{2}(a+c) + b = \frac{11}{8}(a+b+c) + \frac{1}{8}(a+c-3b)$</p>	0,25
	<p>Vì b nằm giữa a, c và $1 \leq a, b, c \leq 2$ nên $a + c \leq 2 + b \leq 2b + b \Rightarrow a + c - 3b \leq 0$.</p> <p>Từ đó suy ra $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \leq \frac{11}{8}(a+b+c)$</p>	0,25
	$M = \frac{\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}}{a+b+c} \leq \frac{11}{8}$ <p>Với $a = b = 1; c = 2$ thì $M = \frac{11}{8}$</p> <p>Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức M bằng $\frac{11}{8}$</p>	0,25