TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

(Đề thi gồm có: 1 Trang)

THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN NĂM 2023–LẦN 1
BÀI THI MÔN 2: Môn Toán chuyên
(Dành cho thí sinh thi thử vào Chuyên Toán, Tin)
Thời gian làm bài: 120 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:..

Số báo danh:..

Câu 1. (3,0 điểm)

a) Cho $a = \sqrt[3]{2} + 2$ và đa thức $P(x) = (x-3)(x-1)^3$. Tính giá trị của $P(a)$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2 = x^2 + xy - 2y^2 \\ x^2y = x^2 + 4y^2. \end{cases}$

Câu 2. (1,5 điểm) Cho số nguyên dương m thoả mãn $3^m + 5^m + 14$ chia hết cho 15. Chứng minh rằng $3^m + 5^m + 14$ chia hết cho 16.

Câu 3. (1,5 điểm) Cho các số dương a, b. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + b + \frac{|a-b|}{b^2} + \frac{|b^2 - b|}{a} \geq 2.$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC, với $AB < AC$ và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F tương ứng là tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I). Đường thẳng đi qua D vuông góc với EF, cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai K (khác D). Gọi L là hình chiếu vuông góc của A trên IK. Các đường thẳng AI, BC cắt nhau tại H; các đường thẳng IK, EF cắt nhau tại J. Chứng minh rằng

a) $\widehat{KIF} = \widehat{ACB}$ và AL là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

b) $LK \cdot BC = AI \cdot EF$.

c) Các đường thẳng DK, HJ, AL đồng quy.

Câu 5. (1,0 điểm) Lần lượt ghi các số $1000, 1001, 1002, \ldots, 1010$ lên 11 tấm thẻ trắng, trên mỗi thẻ ghi đúng một số. Người ta xếp tất cả 11 tấm thẻ đó vào hai chiếc hộp, một chiếc màu xanh và một chiếc màu đỏ, sao cho mỗi hộp có ít nhất một thẻ và tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh chia hết cho tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ. Hỏi, trong mỗi hộp có bao nhiêu tấm thẻ?

..............................**HẾT**..............................

Lời giải

1 (3,0 điểm)

a) Cho $a = \sqrt[3]{2} + 2$ và đa thức $P(x) = (x-3)(x-1)^3$. Tính giá trị của $P(a)$.

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} xy^2 = x^2 + xy - 2y^2 \\ x^2y = x^2 + 4y^2. \end{cases}$

Bài giải.

a) Đặt $\alpha = \sqrt[3]{2}$ thì $a = 2 + \alpha$. Ta có

$$P(a) = (\alpha - 1)(\alpha + 1)^3.$$

Để ý rằng

$$(\alpha + 1)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1 = 3(\alpha^2 + \alpha + 1).$$

Suy ra

$$(\alpha - 1)(\alpha + 1)^3 = 3.(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 3(\alpha^3 - 1) = 3.$$

Vậy $P(a) = 3$. **(1,5 điểm)**

b) Giả sử $(x; y)$ là một nghiệm của hệ. Ta thấy $y = 0$ thì $x = 0$. Xét $y \neq 0$. Khi đó $x \neq 0$. Từ hệ đã cho, ta có

$$\begin{aligned} & xy^2(x^2 + 4y^2) = x^2y(x^2 + xy - 2y^2) \\ \Leftrightarrow\ & x^3y^2 + 4xy^4 = x^4y + x^3y^2 - 2x^2y^3. \end{aligned}$$

Đặt $t = \dfrac{x}{y}$ thì phương trình trở thành

$$\begin{aligned} & t^3 + 4t = t^4 + t^3 - 2t^2 \\ \Leftrightarrow\ & t^3 - 2t - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-2)(t^2 + 2t + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & t = 2. \end{aligned}$$

Từ đó $x = 2y$. Thay vào phương trình thứ hai ta được $y = 2$. Do đó $x = 4$.

Vậy ta thu được $(x; y) = (0; 0)$ và $(2; 4)$. Thử lại ta thấy 2 cặp này đều thoả mãn hệ phương trình đã cho. Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = (0; 0)$ và $(4; 2)$. **(1,5 điểm)**

2 Cho số nguyên dương m thoả mãn $3^m + 5^m + 14$ chia hết cho 15. Chứng minh rằng $3^m + 5^m + 14$ chia hết cho 16.

Bài giải. Do $3^m + 5^m + 14$ chia hết cho 15 nên $5^m - 1$ chia hết cho 3 và $3^m - 1$ chia hết cho 5. Nếu m là số lẻ thì từ $5 \equiv -1 \pmod 3$, ta có

$$5^m \equiv (-1)^m \equiv -1 \pmod 3$$

mâu thuẫn. Vậy m là số chẵn. Nếu $m = 4k + 2$, với $k \in \mathbb{N}$ thì

$$3^m - 1 = 3^{4k}.3^2 \equiv -1.81^k \equiv -1 \pmod 5$$

mâu thuẫn. Vậy $m = 4k$. **(0,75 điểm)**

Ta có $3^m - 1$ chia hết cho $3^4 - 1 = 80$ và $5^m - 1$ chia hết cho $5^4 - 1$, nên $3^m - 1, 5^m - 1$ cùng chia hết cho 16. Vậy

$$3^m + 5^m + 14 = (3^m - 1) + (5^m - 1) + 16$$

chia hết cho 16. **(0,75 điểm)**

3 (1,5 điểm) Cho các số dương a, b. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b} + b + \frac{|a-b|}{b^2} + \frac{|b^2-b|}{a} \geq 2.$$

Bài giải. Ta xét các khả năng:

- Với $a \geq b \geq 1$ thì $\dfrac{a}{b} + b \geq 2$, do đó bất đẳng thức đúng. **(0,25 điểm)**
- Với $a \geq b$ và $b < 1$ thì

$$\begin{aligned} VT &= \frac{a}{b} + b + \frac{a-b}{b^2} + \frac{b-b^2}{a} \\ &\geq \frac{a}{b} + b + \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a} \\ &\geq \frac{a}{b} + b + \frac{b}{a} - b \\ &= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \\ &\geq 2. \qquad (\mathbf{0,5} \text{ điểm}) \end{aligned}$$

- Với $a \leq b \leq 1$ thì

$$\begin{aligned} VT &= \frac{a}{b} + b + \frac{b-a}{b^2} + \frac{b-b^2}{a} \\ &= b + \frac{1}{b} + \frac{a}{b}\left(1 - \frac{1}{b}\right) + \frac{b(1-b)}{a} \\ &= b + \frac{1}{b} + (b-1)\left(\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a}\right) \\ &= 2 + \frac{(b-1)^2}{b} + (b-1)\left(\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a}\right) \\ &= 2 + \frac{b-1}{b}\left(b - 1 + \frac{a}{b} - \frac{b^2}{a}\right) \\ &= 2 + \frac{b-1}{b}.(a-b).\left(\frac{1}{b} + \frac{b}{a}\right) \\ &\geq 2. \qquad (\mathbf{0,25} \text{ điểm}) \end{aligned}$$

- Với $a \leq b$ và $1 \leq b$ thì

$$\begin{aligned} VT &= \frac{a}{b} + b + \frac{b-a}{b^2} + \frac{b^2-b}{a} \\ &= \frac{a}{b} + b + \frac{1}{b} - \frac{a}{b^2} + \frac{b^2}{a} - \frac{b}{a} \\ &\geq \frac{a}{b} + b + \frac{1}{b} - \frac{a}{b^2} \\ &= \frac{a}{b}\left(1 - \frac{1}{b}\right) + b + \frac{1}{b} \\ &\geq b + \frac{1}{b} \\ &\geq 2. \qquad (\mathbf{0,5} \text{ điểm}) \end{aligned}$$

4 Cho tam giác ABC, với $AB < AC$ và ngoại tiếp đường tròn (I). Gọi D, E, F tương ứng là tiếp điểm của BC, CA, AB với đường tròn (I). Đường thẳng đi qua D vuông góc với EF, cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai K (khác D). Gọi L là hình chiếu vuông góc của A trên IK. Các đường thẳng AI, BC cắt nhau tại H; các đường thẳng IK, EF cắt nhau tại J. Chứng minh rằng

a) $\widehat{KIF} = \widehat{ACB}$ và AL là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

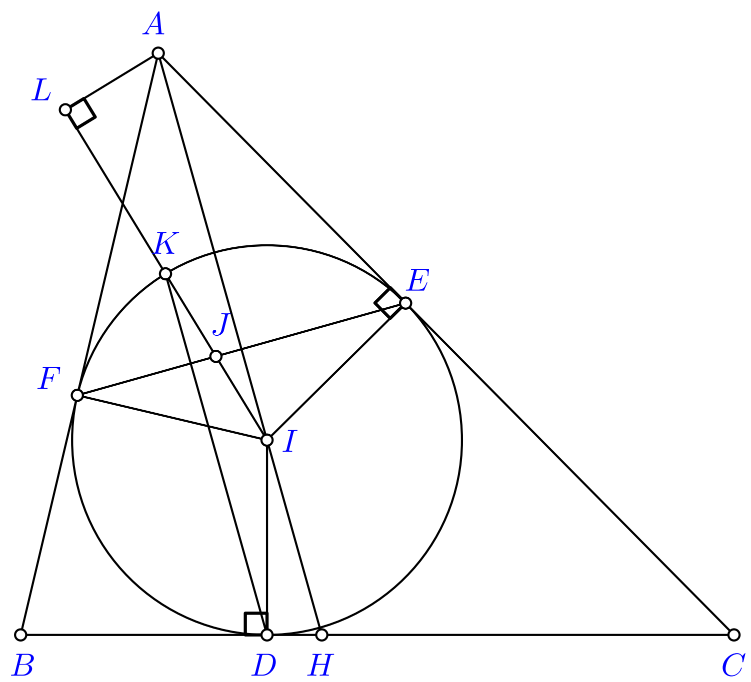
b) $LK \cdot BC = AI \cdot EF$.

c) Các đường thẳng DK, HJ, AL đồng quy.

Bài giải.

a) Ta có

$$\angle KIF = 2.\angle KDF = 2.\left(90^\circ - \angle DFE\right) = 2.\left(90^\circ - \angle EDC\right) = \angle ACB.$$



Do $AL \perp IK$, nên L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Do đó

$$\angle LAF = \angle LIF = \angle ACB.$$

Vậy, AL là tiếp tuyến của đường tròn (ABC). **(1,0 điểm)**

b) Ta có L nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF. Do đó, $\angle LEF = \angle LIF = \angle ACB$ và $\angle ELF = \angle EAF$. Vậy $\Delta LEF \backsim \Delta ACB$.

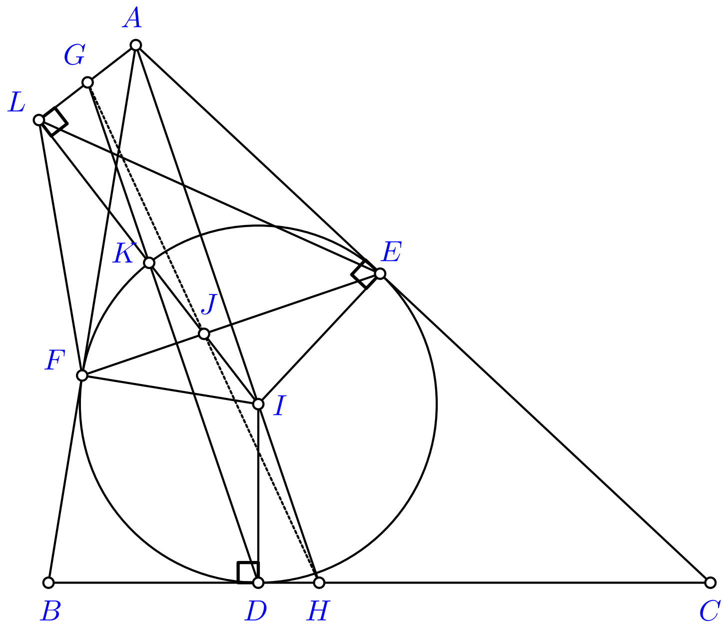
Vì $IE = IF$, nên LI là phân giác của $\angle ELF$. Mặt khác, $\angle LEF = \angle KIF = 2\angle KEF$, ta suy ra EK là phân giác của $\angle LEF$. Vậy K là tâm đường tròn nội tiếp tam giác LEF.

Từ đó, $\Delta LKF \backsim \Delta AIB$ (g.g). Vậy,

$$\frac{LK}{AI} = \frac{LF}{AB} = \frac{EF}{BC}.$$

Suy ra, $LK.BC = AI.EF$. **(1,0 điểm)**

c) Gọi G là giao điểm của DK và AL.



Ta có

$$IJ \cdot LK = IJ \cdot LI - IJ \cdot IK = IK^2 - IJ \cdot IK = IK \cdot KJ.$$

Suy ra $\dfrac{LK}{KJ} = \dfrac{IK}{IJ}$. Mặt khác, $\dfrac{GK}{LK} = \dfrac{AI}{LI}$. Suy ra $\dfrac{GK}{KJ} = \dfrac{IK}{IJ} \cdot \dfrac{AI}{LI}$.

Vì $IJ \cdot LI = IE^2 = IK^2$, nên $\dfrac{GK}{KJ} = \dfrac{AI}{IK}$ (1).

Dễ thấy $\triangle JEI \sim \triangle HAB$. Suy ra $\dfrac{AI}{IH} = \dfrac{BA}{BH} = \dfrac{IE}{IJ} = \dfrac{IK}{IJ}$.

Kết hợp với (1), ta có: $\dfrac{GK}{KJ} = \dfrac{IH}{IJ}$.

Vậy G, J, H thẳng hàng. **(1,0 điểm)**

5 Lần lượt ghi các số $1000, 1001, 1002, \ldots, 1010$ lên 11 tấm thẻ trắng, trên mỗi thẻ ghi đúng một số. Người ta xếp tất cả 11 tấm thẻ đó vào hai chiếc hộp, một chiếc màu xanh và một chiếc màu đỏ, sao cho mỗi hộp có ít nhất một thẻ và tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh chia hết cho tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ. Hỏi, trong mỗi hộp có bao nhiêu tấm thẻ?

Bài giải. Gọi tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp xanh là a và tổng các số được ghi trong hộp đỏ là b.

Ta có $x, y \in \mathbb{N}^*$. Theo giả thiết x chia hết cho y nên $x = ky$, với k là một số nguyên dương nào đó. Vì

$$1000 + 1001 + 1002 + \cdots + 1010 = 11 \times 1000 + (0 + 1 + \cdots + 10) = 11055$$

nên $x + y = 11055$. Vậy ta có phương trình $y(k+1) = 11055$. Do mỗi tấm thẻ đều ghi một số không nhỏ hơn 1000 nên $y \geq 1000$. Suy ra $k + 1 \leq 11,055$. Vậy $k + 1 \leq 11$. Mặt khác $11055 = 3 \times 5 \times 11 \times 67$ và $k + 1$ là một ước lớn hơn 1 của 11055. Suy ra $k + 1 \in \{3; 5; 11\}$. Vậy $k \in \{2; 4; 10\}$. **(0,5 điểm)**

Với $k = 2$: thì $y = 3685$. Vì tổng 3 số ở 3 tấm thẻ lớn nhất là $1010 + 1009 + 1008 < 3685$. Vậy khả năng này không xảy ra.

Với $k = 4$ thì $y = 2211$: Vì mỗi tấm thẻ ít nhất là 1000 nên tổng của 4 tấm thẻ lớn hơn 4000. Vậy khả năng này không thể xảy ra.

Với $k = 10$ thì $y = 1005$: Như vậy hộp đỏ có chiếc thẻ 1005 và hộp xanh chứa các thẻ còn lại. Trường hợp này xảy ra, vì khi đó tổng các số được ghi ở các thẻ trong hộp đỏ là $10000 + 50 = 10050 = 10 \times 1005$.

Do đó hộp xanh có 10 tấm thẻ và hộp đỏ có 1 tấm thẻ. **(0,5 điểm)**