TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm có: 01 trang

KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM 2024 – LẦN 1
BÀI THI MÔN: TOÁN CHUYÊN
Dành cho thí sinh thi thử vào chuyên Toán, chuyên Tin
Thời gian làm bài: **120** *phút*
(không kể thời gian phát đề)

Họ tên thí sinh: ....

Số báo danh: ....

Câu 1 (2.5 điểm)**.**

(a) Giả sử a, b là các số thực thoả mãn: với x, y là hai số thực bất kì ta luôn có

$$|(ax+by)(ay+bx)| \le x^2 + y^2.$$

Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \le 2$.

(b) Giải phương trình

$$x + 4 = \sqrt{5-x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{(5-x)(2-x)}.$$

Câu 2 (1,5 điểm)**.** Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a \neq c$ và

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = 2.$$

Tính giá trị biểu thức

$$S = \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c}.$$

Câu 3 (3 điểm)**.** Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), có $AB < AC$. Trên đường tròn (O) lấy điểm M khác A sao cho $AM \| BC$. Vẽ đường tròn (K) tiếp xúc với AO tại A, và đi qua M. Đường tròn (K) cắt các đường thẳng AB, AC tại các điểm thứ hai F, E (F, E khác A). Các đường thẳng OM, BC cắt nhau tại điểm D.

(a) Chứng minh rằng các điểm D, E, F thẳng hàng.

(b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Các đường thẳng AO và DE cắt nhau tại điểm L. Chứng minh rằng $AHDL$ là hình bình hành.

Câu 4 (3 điểm)**.**

(a) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r sao cho $pq - 6, qr + 1, rp + 10$ là các số chính phương.

(b) Chứng minh rằng, trong mỗi bát giác lồi, luôn có ít nhất ba đường chéo, mà độ dài của chúng đôi một khác nhau. (Bát giác lồi là một đa giác lồi có 8 cạnh).

.....................................HẾT.....................................

Giải

Câu 1

(a) Giả sử a, b là các số thực thoả mãn: với x, y là hai số thực bất kì ta luôn có

$$|(ax+by)(ay+bx)| \leq x^2+y^2.$$

Chứng minh rằng $a^2+b^2 \leq 2$.

(b) Giải phương trình

$$x+4=\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{(5-x)(2-x)}.$$

Bài giải.

(a) (**1 điểm**) Với $x=y=1$ ta được $(a+b)^2 \leq 2$. Mặt khác, với $x=1, y=-1$ ta được $(a-b)^2 \leq 2$. Vậy $2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2 \leq 4$. Suy ra $a^2+b^2 \leq 2$.

Nhận xét. Có thể chỉ ra điều kiện cần và đủ là $(a \pm b)^2 \leq 2$.

(b) (**1.5 điểm**) Điều kiện: $x \leq 2$.

Cách 1. Đặt $t=\sqrt{5-x}+\sqrt{2-x}$, với $t \geq 0$. Ta có $\sqrt{(5-x)(2-x)}=\dfrac{t^2+2x-7}{2}$. Vậy, phương trình đã cho trở thành

$$\begin{aligned}
& x+4=t+\frac{t^2+2x-7}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{t^2}{2}+t-\frac{15}{2}=0 \\
\Leftrightarrow\ & t=3 \quad \text{hoặc} \quad \mathrm{t}=-5.
\end{aligned}$$

Vì $t \geq 0$, nên $t=3$. Ta có:

$$\sqrt{(5-x)(2-x)}=x+1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \geq -1 \\ (5-x)(2-x)=(x+1)^2 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$$

Cách 2. Đặt $a=\sqrt{5-x}$, $b=\sqrt{2-x}$ phương trình trở thành

$$x=a+b+ab-4.$$

Ta có $a^2+x=5$ và $b^2+x=2$. Do đó

$$\begin{cases}(a+b)(a+1)=9 \\ (a+b)(b+1)=6.\end{cases}$$

Suy ra $2(a+1)=3(b+1)$ hay $2a=3b+1$. Từ đó

$$2x=(3b+1)+2b+(3b+1)b-8=3b^2+6b-7.$$

Từ đó

$$\begin{aligned}
& b^2+x=2 \\
\Leftrightarrow\ & 5b^2+6b-7=4 \\
\Leftrightarrow\ & 5b^2+6b-11=0 \\
\Leftrightarrow\ & (b-1)(5b+11)=0 \\
\Leftrightarrow\ & b=1 \qquad (\text{do } b \geq 0).
\end{aligned}$$

Vậy $a=2$, do đó $x=1$. Thử lại ta thấy $x=1$ là nghiệm của phương trình.

Câu 2 Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $a \neq c$ và

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{2\sqrt{c}}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = 2.$$

Tính

$$S = \frac{a}{a+b} + \frac{c}{b+c}.$$

Bài giải. (**1.5 điểm**) Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned}
&\frac{a}{a+b} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{c}} - \frac{b}{b+c} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{a\sqrt{c}-b\sqrt{a}}{(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{c})} = \frac{c\sqrt{a}-b\sqrt{c}}{(b+c)(\sqrt{a}+\sqrt{c})} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\sqrt{a}(\sqrt{ac}-b)}{a+b} = \frac{\sqrt{c}(\sqrt{ac}-b)}{b+c}.
\end{aligned}$$

Nếu $b \neq \sqrt{ac}$ thì

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{a}}{a+b} = \frac{\sqrt{c}}{b+c} \\
\Leftrightarrow\ &b\sqrt{a} + c\sqrt{a} = a\sqrt{c} + b\sqrt{c} \\
\Leftrightarrow\ &(\sqrt{a}-\sqrt{c})(b-\sqrt{ac}) = 0 \quad \text{(mâu thuẫn)}.
\end{aligned}$$

Vậy $b = \sqrt{ac}$. Từ đó

$$S = \frac{a}{a+\sqrt{ac}} + \frac{c}{\sqrt{ac}+c} = 1.$$

Câu 3 Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), có $AB < AC$. Trên đường tròn (O) lấy điểm M khác A sao cho $AM \| BC$. Vẽ đường tròn (K) tiếp xúc với AO tại A, và đi qua M. Đường tròn (K) cắt các đường thẳng AB, AC tại các điểm thứ hai F, E (F, E khác A). Các đường thẳng OM, BC cắt nhau tại điểm D.

(a) Chứng minh rằng các điểm D, E, F thẳng hàng.

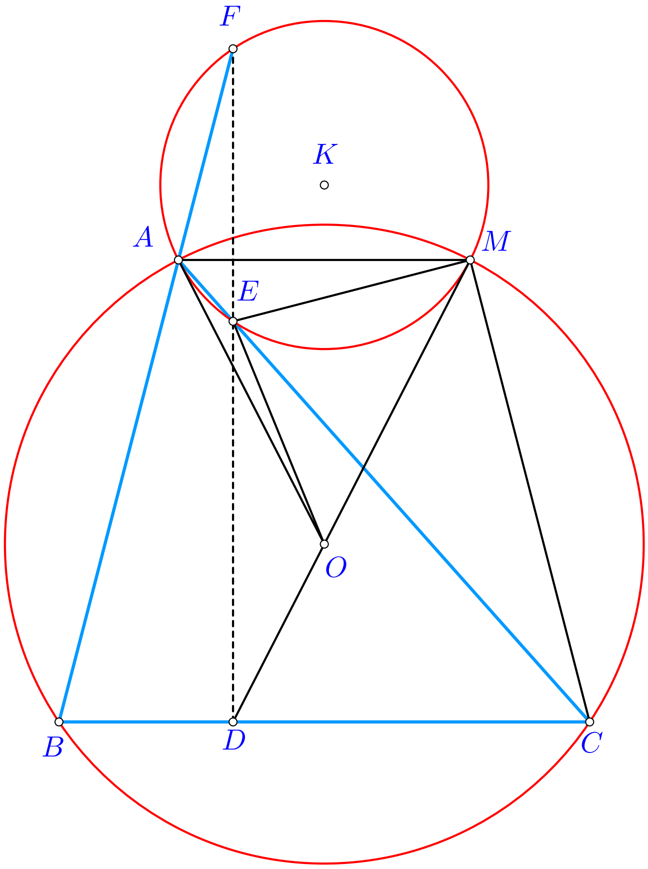
(b) Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Các đường thẳng AO và DE cắt nhau tại điểm L. Chứng minh rằng $AHDL$ là hình bình hành.

Bài giải.

(a) (**1.5 điểm**) Ta có O, K cách đều A, M. Vậy OK là đường trung trực của AM. Thành thử theo tính đối xứng, OM là tiếp tuyến tại M của (K). Từ đó

$$\angle EMD = \angle MAE = \angle ECD.$$

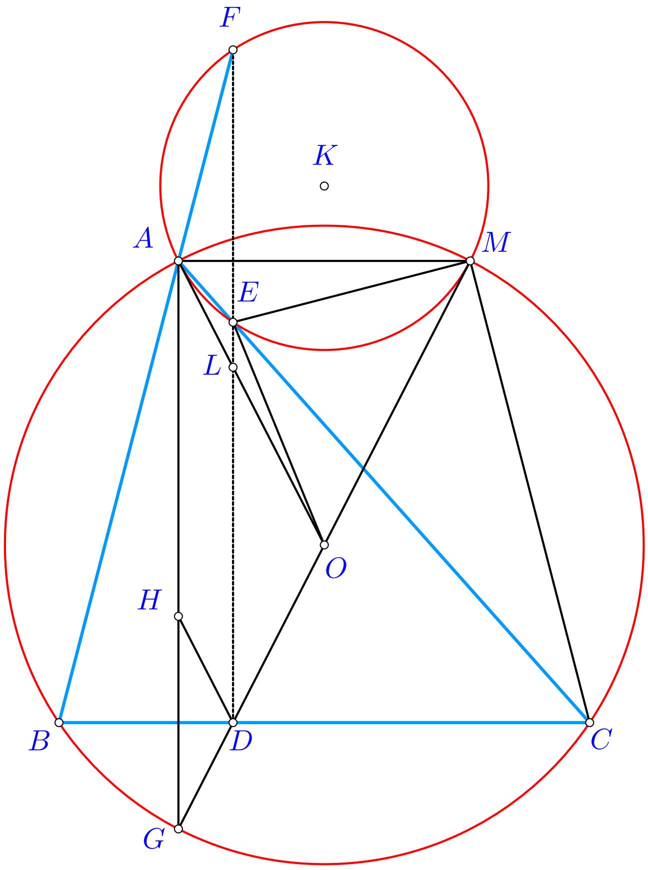
Vậy tứ giác $DEMC$ nội tiếp. Suy ra $\angle MED + \angle MCB = 180°$. Mặt khác, theo tính chất của tứ giác nội tiếp $\angle FEM = \angle FAM = \angle MCB$. Vậy $\angle FEM + \angle MED = 180°$ hay các điểm D, E, F thẳng hàng.



(b) (**1.5 điểm**) Kéo dài MD cắt (O) tại điểm thứ hai G. Do AG là đường kính nên $AM \perp AG$. Vì $AM \| BC$ nên $AG \perp BC$. Vậy A, H, G thẳng hàng. Từ đó G, H đối xứng nhau qua BC. Suy ra

$$\widehat{GHD} = \widehat{HGD} = \widehat{OAG}.$$

Vậy, $HD \| AL$. Mà $AH \| LD$ (vì cùng vuông góc với BC). Suy ra $AHDL$ là hình bình hành.



Câu 4

(a) Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r sao cho $pq - 6, qr + 1, rp + 10$ là các số chính phương.

(b) Chứng minh rằng, trong mỗi bát giác lồi, luôn có ít nhất ba đường chéo, mà độ dài của chúng đôi một khác nhau. (Bát giác lồi là một đa giác lồi có 8 cạnh).

Bài giải.

(a) (**1.5 điểm**) Giả sử $pq - 6 = x^2$, $qr + 1 = y^2$ và $rp + 10 = z^2$. Nếu p, q, r cùng là các số lẻ thì x, z lẻ nên $pq \equiv rp \equiv 3 \pmod 4$. Vậy $q \equiv r \pmod 4$. Ngoài ra, $qr \equiv -1 \pmod 4$, mâu thuẫn. Vậy trong các số p, q, r có ít nhất một số là số chẵn.

+/ p, q, r phải phân biệt đôi một: Nếu $p = q$, ta được $p^2 - x^2 = 6$. Khi đó p, x cùng tính chẵn lẻ nên $4 \mid p^2 - x^2$, mâu thuẫn. Vậy $p \neq q$. Tương tự $r \neq p$. Nếu $q = r$ ta được $q^2 + 1 = y^2$, mâu thuẫn.

+/ Nếu $q = 2$, ta được $2r + 1 = y^2$. Vậy y lẻ nên $y^2 \equiv 1 \pmod 8$. Suy ra $8 \mid 2r$, mâu thuẫn. Nếu $r = 2$ thì tương tự. Do đó $p = 2$. Ta có

$$\begin{cases} q - 3 = 2x_1^2 \\ qr + 1 = y^2 \\ r + 5 = 2z_1^2. \end{cases}$$

Từ đó $qr = (y-1)(y+1)$. Nếu $q \mid y - 1$, ta được

$$r = \frac{y-1}{q}.(y+1).$$

Vậy $q = y - 1$ và $r = y + 1$. Suy ra $r - q = 2$. Tương tự, $q \mid y + 1$ thì

$$r = \frac{y+1}{q}.(y-1)$$

do đó $y - 1 = 1$ hoặc $q = y + 1$. Khả năng thứ nhất, ta được $qr + 1 = 4$, loại. Vậy $y + 1 = q$ và $r = y - 1$. Từ đó $q - r = 2$. Tóm lại $|q - r| = 2$. Ta được

+/ $r = q + 2$ thì $q + 7 = 2z_1^2$ và $q - 3 = 2x_1^2$. Ta được $2z_1^2 - 2x_1^2 = 10$ hay $z_1^2 - x_1^2 = 5$. Từ đó $z_1 = 3, x_1 = 2$ hay $q = 11$ và $r = 13$.

+/ $q = r + 2$ thì $r - 1 = 2x_1^2$ và $r + 5 = 2z_1^2$. Ta được $z_1^2 - x_1^2 = 3$. Từ đó $z_1 = 2, x_1 = 1$. Vậy $r = 3$ và $q = 5$.

Tóm lại (p, q, r) là $(2, 5, 3)$ hoặc $(2, 11, 13)$.

(b) (**1.5 điểm**) Ta bắt đầu bằng một nhận xét đơn giản: trong một đa giác lồi bất kì, đường trung trực của mỗi cạnh đi qua không quá một đỉnh của đa giác đó.

Phản chứng, giả sử rằng 3 đường chéo bất kì, luôn có hai đường chéo có độ dài bằng nhau. Vậy tồn tại a, b dương sao cho mỗi đường chéo có độ dài hoặc bằng a hoặc bằng b.

Xét một cạnh AB của bát giác lồi đã cho. Với mỗi đỉnh C mà không kề với A, B thì AC, BC là các đường chéo. Do đó $AC = BC = a$ hoặc $AC = BC = b$ hoặc $AC = a, BC = b$ hoặc $AC = b, BC = a$. Lưu ý rằng, nếu $CA = CB$ thì C nằm trên trung trực của AB, do đó số các điểm C thoả mãn $AC = BC = a$ hoặc $AC = BC = b$ tối đa là 1 điểm (do bát giác là lồi). Hơn nữa chỉ có tối đa 1 điểm C thoả mãn $AC = a, BC = b$, vì nếu có 2 điểm C_1, C_2 thì A, B nằm trên trung trực của C_1C_2, mâu thuẫn. Tương tự, cũng có tối đa 1 điểm C sao cho $AC = b, BC = a$. Vậy có tối đa 3 điểm C không kề với A, B. Thành thử đa giác có tối đa $2 + 3 + 2 = 7$ đỉnh, mâu thuẫn.