TRƯỜNG ĐHSP HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đề thi gồm có: 01 trang

KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM 2023 – LẦN 2
BÀI THI MÔN 1: Môn Toán chung
Dành cho tất cả các thí sinh thi thử
Thời gian làm bài: 90 phút
(không kể thời gian phát đề)

Họ và tên thí sinh: ……………………………………….
Số báo danh: …………………………………….........

Câu 1. *(2,0 điểm)* Cho biểu thức:

$$A=\frac{4\sqrt{x}+8}{x-4}-\frac{3x+3\sqrt{x}}{2x+3\sqrt{x}+1}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{2x-3\sqrt{x}-2}, \text{ với } x\geq 0, x\neq 4.$$

1) Chứng minh rằng $A=\frac{3}{2\sqrt{x}+1}$.
2) Tìm tất cả các số thực x để A nhận giá trị nguyên.

Câu 2. *(2,0 điểm)* Một hội trường có 374 ghế, được xếp thành nhiều dãy, số ghế ở mỗi dãy bằng nhau và không vượt quá 30. Hãy tìm số dãy ghế của hội trường biết rằng: nếu kê mỗi dãy thêm 2 ghế và bổ sung thêm 1 dãy ghế (số ghế ở mỗi dãy vẫn bằng nhau) thì tổng số ghế là 432.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

1) Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=(m-1)x+2m+3$ cắt hai trục tọa độ Ox, Oy tương ứng tại hai điểm A, B phân biệt sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4.
2) Chứng minh rằng, với hai số thực a, b bất kì, ít nhất một trong hai phương trình (ẩn là x) sau đây có nghiệm: $x^2-2ax-(a^2-4b^2+1)=0$ và $x^2-4bx-(b^2-2ab-a)=0$.

Câu 4. *(3,0 điểm)* Cho đường tròn (O) có đường kính AB và M là một điểm nằm trên (O) (M khác A, B). Trong nửa mặt phẳng chứa M, có bờ là đường thẳng AB vẽ các tia Ax, By vuông góc với AB. Tiếp tuyến tại M của (O) cắt các tia Ax, By lần lượt tại C, D.

1) Chứng minh rằng đường thẳng AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.
2) Vẽ đường tròn (I) qua M, tiếp xúc với Ax tại C. Tia OC cắt đường tròn (I) tại điểm thứ hai J. Chứng minh rằng J là trung điểm của OC.
3) Gọi E là trung điểm của OA. Chứng minh rằng đường thẳng qua E và vuông góc với BC cắt OM tại một điểm thuộc đường tròn (I).

Câu 5. *(1,0 điểm)*

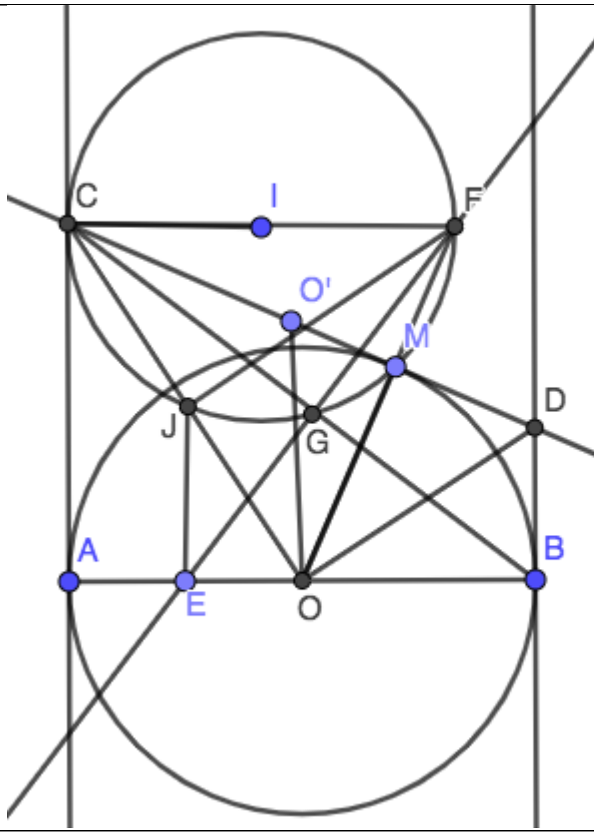
1) Hãy chỉ ra một số thực x khác $0, \pm 1$ để $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên.
2) Cho x là một số thực khác $0, \pm 1$ thỏa mãn $x+\frac{1}{x}$ là số nguyên. Chứng minh rằng $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số vô tỉ.

……………….Hết………………

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM 2023 – LẦN 2
BÀI THI MÔN 2: Môn Toán chung

Câu	Đáp án	Điểm
Câu 1.1 *1,0 điểm*	$A=\frac{4(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}-\frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$ $A=\frac{4}{\sqrt{x}-2}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$	***0,25***
	$A=\frac{4(2\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}+\frac{3x-11\sqrt{x}-10}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$	***0,25***
	$A=\frac{3x-3\sqrt{x}-6}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}$	***0,25***
	$A=\frac{3(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=\frac{3(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}+1}-\frac{3\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2\sqrt{x}+1}$	***0,25***
Câu 1.2 *1,0 điểm*	+ Dễ chứng minh: $0<A\le 3$	***0,25***
	+ Vì A là số nguyên nên $A\in\{1;2;3\}$	***0,25***
	$+) A=1\Rightarrow x=1$ $+) A=2\Rightarrow x=\frac{1}{16}$ $+) A=3\Rightarrow x=0$	***0,25***
	+ Kết hợp điều kiện ta có các giá trị x thỏa mãn là $0,\frac{1}{16},1.$	***0,25***
	Ghi chú: Nếu học sinh lập luận $2\sqrt{x}+1$ là ước của 3 và tìm ra $x\in\{0;1\}$ thì không cho điểm nào từ đó đến hết câu.	
Câu 2 *2,0 điểm*	+ Gọi x là số dãy ghế và y là số ghế mỗi dãy trong hội trường lúc bình thường. $(x,y\in N^*; y\le 30)$	***0,25***
	+ Vì bình thường hội trường có 374 ghế và số ghế mỗi dãy bằng nhau nên ta có phương trình: $xy=374$ (1)	***0,25***
	+ Vì khi kê mỗi dãy thêm 2 ghế và bổ sung thêm 1 dãy ghế (số ghế ở mỗi dãy vẫn bằng nhau) thì tổng số ghế là 432 nên ta có phương trình: $(x+1)(y+2)=432$ (2)	***0,25***
	+ Từ (2) ta có: $xy+y+2x+2=432$ (3)	***0,25***
	+ Lấy (3) – (1) theo vế ta thu được: $y+2x=56$ (4) + Từ (4) ta có: $y=56-2x$, thế vào (1) ta thu được: $x(56-2x)=374$	***0,25***
	$\Leftrightarrow 2x^2-56x+374=0\Leftrightarrow x^2-28x+187=0$	***0,25***
	$\Leftrightarrow (x-17)(x-11)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=17\\x=11\end{array}\right.$	***0,25***
	$x=17\Rightarrow y=22$ $x=11\Rightarrow y=34$ Kết hợp điều kiện $y\le 30$ ta có $x=17, y=22$. Vậy bình thường hội trường có 17 dãy ghế.	***0,25***

Câu 3.1 *1,0 điểm*	+ Vì hàm số $y=(m-1)x+2m+3$ là hàm bậc nhất nên $m\neq 1$. Khi đó đồ thị của hàm số cắt hai trục tọa độ Ox, Oy lần lượt tại hai điểm $A(\frac{-2m-3}{m-1};0), B(0;2m+3)$.	***0,25***
	+ Khi đó $OA=\left\lvert\frac{-2m-3}{m-1}\right\rvert, OB=\lvert 2m+3\rvert \Rightarrow S_{\Delta OAB}=\frac{OA.OB}{2}=\frac{(2m+3)^2}{2\lvert m-1\rvert}$ + Từ giả thiết, ta có: $\frac{(2m+3)^2}{2\lvert m-1\rvert}=4\Leftrightarrow (2m+3)^2=8\lvert m-1\rvert\quad (*)$	***0,25***
	+ TH1: $m\geq 1$. Phương trình (*) trở thành: $4m^2+12m+9=8m-8\Leftrightarrow 4m^2+4m+17=0$ $\Delta'=-64<0$ nên phương trình vô nghiệm.	***0,25***
	+ TH2: $m<1$. Phương trình (*) trở thành: $4m^2+12m+9=-8m+8\Leftrightarrow 4m^2+20m+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{2\sqrt{6}-5}{2} \\ m=\frac{-2\sqrt{6}-5}{2}\end{array}\right.$ Kết hợp điều kiện ta có $\left[\begin{array}{l} m=\frac{2\sqrt{6}-5}{2} \\ m=\frac{-2\sqrt{6}-5}{2}\end{array}\right.$	***0,25***
	Ghi chú: nếu trong bài làm học sinh không chỉ ra $m\neq 1$ thì trừ *0,25* điểm.	
Câu 3.2 *1,0 điểm*	+ Ta thấy $x^2-2ax-(a^2-4b^2+1)=0$ có: $\Delta_1'=a^2+(a^2-4b^2+1)=2a^2-4b^2+1$ và $x^2-4bx-(b^2-2ab-a)=0$ có $\Delta_2'=4b^2+(b^2-2ab-a)=5b^2-2ab-a$	***0,25***
	+ Xét $\Delta_1'+\Delta_2'=2a^2+b^2-2ab-a+1$	***0,25***
	$\Delta_1'+\Delta_2'=2a^2+b^2-2ab-a+1=(a-b)^2+(a-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$	***0,25***
	+ Ta thấy $\Delta_1'+\Delta_2'>0$ nên có ít nhất một trong hai số Δ_1',Δ_2' là số dương. Từ đó suy ra ít nhất một trong hai phương trình đã cho có nghiệm.	***0,25***
Câu 4	+ Hình vẽ:	

		
Câu 4.1 *1,0 điểm*	+ Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có OC là phân giác của góc AOM, OD là phân giác của góc BOM	***0,25***
	$\Rightarrow \angle COD = 90^0 \Rightarrow \Delta COD$ vuông tại O $\Rightarrow O$ thuộc đường tròn đường kính CD. (1)	***0,25***
	+ Gọi O' là trung điểm của CD thì O' là tâm của đường tròn đường kính CD. (2)	***0,25***
	+ Mặt khác OO' là đường trung bình của hình thang $ABDC$ nên $OO'//AC//BD$. $\Rightarrow OO' \perp AB$ (3) + từ (1), (2), (3) suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD (đpcm).	***0,25***
Câu 4.2 *1,0 điểm*	+ OM cắt đường tròn (I) tại F khác M. + Vì CM là tiếp tuyến của đường tròn (O) nên $\angle CMO = 90^0 \Rightarrow \angle CMF = 90^0$ $\Rightarrow C, I, F$ thẳng hàng hay CF là đường kính của đường tròn (I).	***0,25***
	+ Vì đường tròn (I) tiếp xúc với Ax tại C nên $IC \perp AC$ hay $CF//AB$ $\Rightarrow \angle FCO = \angle COA$ (4) + Mặt khác, OC là phân giác của góc AOM (theo phần *4.1*) nên $\angle COA = \angle COF$ (5) Từ (4), (5) $\Rightarrow \angle FCO = \angle COF$ hay tam giác FCO cân tại F. (6)	***0,25***
	+ Mặt khác, J thuộc đường tròn đường kính CF nên $\angle CJF = 90^0$. $\Rightarrow FJ \perp CO$ (7)	***0,25***
	+ Từ (6), (7) suy ra tam giác FCO cân tại F có FJ là đường cao đồng thời là trung tuyến. Do đó, J là trung điểm của OC (đpcm).	***0,25***
Câu 4.3 *1,0 điểm*	+ Ta sẽ chứng minh FE vuông góc với BC. Thật vậy, gọi G là giao điểm của FE và BC. + Ta thấy EJ là đường trung bình của tam giác OCA nên $EJ//CA, EJ = \frac{CA}{2}$. $\Rightarrow EJ \perp AB$.	***0,25***

	+ Ta thấy: ΔFJO đồng dạng với ΔJEO $(g.g)$ do $\angle FJO = \angle JEO = 90^0, \angle FOJ = \angle JOE$ $\Rightarrow \frac{FJ}{JE} = \frac{JO}{EO} = \frac{CO}{AO} = \frac{CO}{BO}$ (do J, E lần lượt là trung điểm của CO, AO). (8)	***0,25***
	+ Mặt khác, theo tính chất góc ngoài tam giác: $\angle COB = \angle EJO + 90^0 = \angle FJE$ (9) Từ (8), (9) suy ra ΔFJE đồng dạng với ΔCOB $(c.g.c)$	***0,25***
	$\Rightarrow \angle JEF = \angle OBC \Rightarrow \angle OBC + \angle OEG = \angle JEF + \angle OEG = \angle JEO = 90^0$ $\Rightarrow EF \perp BC$. + Từ đó, ta thấy đường thẳng qua E và vuông góc với BC cắt OM tại điểm F thuộc đường tròn (I) (đpcm).	***0,25***
Câu 5.1 *0,25 điểm*	+ Để chỉ ra có số thực x để $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên ta xét phương trình $x + \frac{1}{x} = 3$ $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$	***0,25***
Câu 5.2 *0,75 điểm*	+ Trước hết ta chứng minh x là số vô tỉ. Thật vật, giả sử x là số hữu tỉ thì x có dạng $\frac{m}{n}$ với $m \in Z, n \in N^*, (m,n) = 1$. Khi đó, $x + \frac{1}{x} = \frac{m^2 + n^2}{mn}$. + Vì $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên nên $(m^2 + n^2) \vdots m.n$. Do đó, $m^2 \vdots n, n^2 \vdots m$. Mà $(m,n) = 1$ nên $m \vdots n, n \vdots m$. Lại do $(m,n) = 1$ nên $m = \pm 1$. Tương tự $n = \pm 1$. Do đó $x = \pm 1$ (trái giả thiết $\|x\| \neq 1$). Vậy x là số vô tỉ. (1)	***0,25***
	+ Ta thấy: $\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) = 2x$. Nếu $x - \frac{1}{x}$ là số hữu tỉ thì $\frac{\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right)}{2} = x$ là số hữu tỉ (trái với (1)). Do đó $x - \frac{1}{x}$ là số vô tỉ. (2)	***0,25***
	+ Mặt khác, $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4$. Vì $x + \frac{1}{x}$ là số nguyên nên $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ là số nguyên. Do đó $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2022}$ cũng là số nguyên. + Do $\|x\| \neq 1$ nên $x - \frac{1}{x} \neq 0$. + Ta thấy: $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2023} = \left(x - \frac{1}{x}\right)^{2022} . \left(x - \frac{1}{x}\right)$. Nếu $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số hữu tỉ thì $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2023} : \left(x - \frac{1}{x}\right)^{2022} = x - \frac{1}{x}$ là số hữu tỉ (trái với (2)). Vậy $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{2023}$ là số vô tỉ.	***0,25***