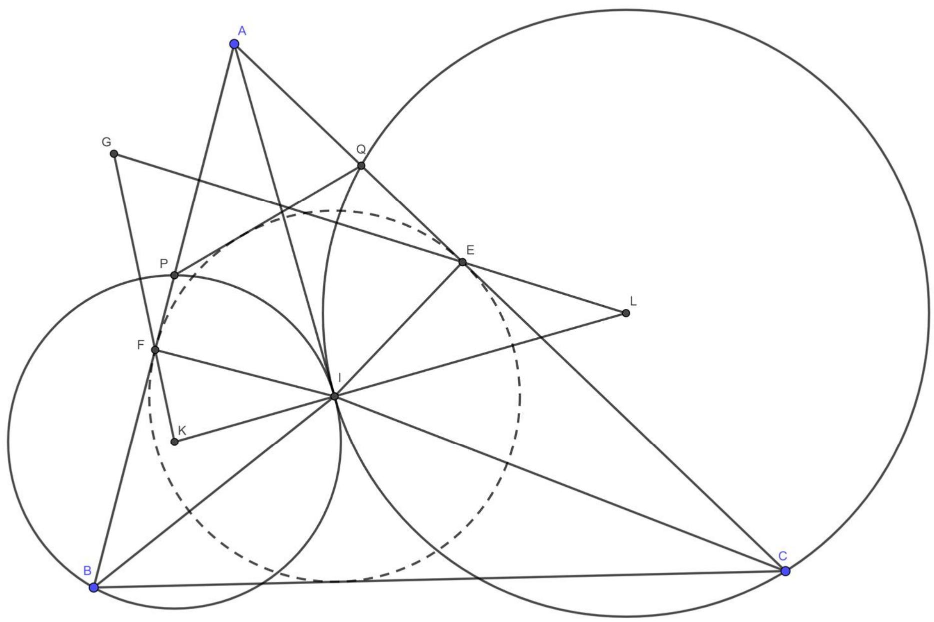
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
**TRƯỜNG THPT CHUYÊN**

**KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT NĂM 2023**
**LẦN 2**
**ĐÁP ÁN TOÁN CHUYÊN**
*(Dành cho mọi thí sinh thi thử chuyên toán, tin)*

| Câu | Gợi ý – Thang điểm | Điểm |
|---|---|---|
| **Câu I.1** *1.5 điểm* | Điều kiên: $\frac{-1}{3} \le x, y \le 5$<br>Từ hệ suy ra $\sqrt{3x+1}-\sqrt{5-x}=\sqrt{3y+1}-\sqrt{5-y}$<br>Nếu $x>y$ thì VT>VP<br>Nếu $x<y$ thì VT<VP<br>Do đó $x=y$ | ***0,75*** |
| | Thay $x=y$ vào pt (1) ta được<br>$\sqrt{3x+1}+\sqrt{5-x}=4 \Leftrightarrow 6+2x+2\sqrt{(3x+1)(5-x)}=16 \Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)(5-x)}=5-x$<br>$\Leftrightarrow (3x+1)(5-x)=(5-x)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \end{array}\right.$<br>Vậy hệ có nghiệm $(5;5)$ và $(1;1)$. | ***0,75*** |
| **Câu I.2** *1.5 điểm* | Từ giả thiết suy ra $a,b$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-5nx-1=0$ và $c,d$ là hai nghiệm của phương trình $x^2-3nx-1=0$. Theo định lý Viet ta có $\begin{cases} a+b=5n \\ ab=-1 \\ c+d=3n \\ cd=-1 \end{cases}$. | **0,5** |
| | Ta có<br>$P=(a-c)(b-c)(a+d)(b+d)=\left(ab-(a+b)c+c^2\right)\left(ab+(a+b)d+d^2\right)$<br>$=\left(c^2-5cn-1\right)\left(d^2+5dn-1\right)$ | **0,5** |
| | Vì $c^2-3nc-1=0$ và $d^2-3nd-1=0$ nên $P=(-2nc)(8nd)=-16n^2cd=16n^2$.<br>Do đó P là bình phương của một số nguyên. | **0,5** |
| **Câu II.1** *(1.5 điểm)* | Ta chứng minh $A=1+2^2+3^3+...+2039^{2039}$ không thể là số chính phương. Thật vậy, xét số dư của các số hạng trong $A$ theo mod 3 ta có dãy số dư lần lượt là $1,1,0,1,-1,0,1,1,0,1,-1,0,....$ .<br>Ta có 2039 :6=339 dư 5. Do đó tổng $A$ chia 3 dư 2. Vậy $A$ không là số chính phương. | ***0,5*** |

| | | |
|---|---|---|
| | Ta chứng minh $A$ không thể là lũy thừa của số tự nhiên với số mũ lớn hơn 2.<br>Ta xét số dư của $A$ theo mod 8.<br>Ta có $n^n \equiv n(\bmod 8), \forall n$ lẻ và $n^n \equiv 0(\bmod 8)$ với mọi n chẵn >2<br>Suy ra $A \equiv 2^2 + 1 + 3 + ... + 2039 \equiv 4 + 1020^2 \equiv 4(\bmod 8)$<br>Vì $A$ chẵn nên nếu $A = m^k, k \geq 3$ thì m chẵn và do đó $A \equiv 0(\bmod 8)$ (mẫu thuẫn).<br>Vậy ta có đpcm. | ***1,0*** |
| **Câu II.2** *(1,5 điểm)* | **Cách 1**<br>$P = \frac{1+x^2}{z+2} + \frac{1+y^2}{x+2} + \frac{1+z^2}{y+2} = \frac{(1+x^2)^2}{(z+2)(1+x^2)} + \frac{(1+y^2)^2}{(x+2)(1+y^2)} + \frac{(1+z^2)^2}{(y+2)(1+z^2)}$<br>$\geq \frac{(3+x^2+y^2+z^2)^2}{(z+2)(1+x^2)+(x+2)(1+y^2)+(y+2)(1+z^2)}$<br>$= \frac{36}{x+y+z+6+x^2z+y^2x+z^2y+2(x^2+y^2+z^2)}$ | ***1.0*** |
| | Vì $(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) = 9$ nên $x+y+z \leq 3$ và<br>$(xy^2+yz^2+zx^2)^2 \leq (x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2) \leq \frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^3 = 9$<br>Nên $P \geq \frac{36}{3+6+3+6} = 2$. Dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = 1$. Vậy minP=2. | ***0.5*** |
| | **Cách 2:** Ta có<br>$\frac{1+x^2}{z+2} + \frac{(1+x^2)(z+2)}{9} \geq \frac{2}{3}(1+x^2)$<br>$\Rightarrow \frac{1+x^2}{z+2} \geq \frac{2}{3}(1+x^2) - \frac{(1+x^2)(z+2)}{9} = \frac{4}{9}(1+x^2) - \frac{z(1+x^2)}{9}$ | ***0,5*** |
| | Tương tự, ta suy ra<br>$VT \geq \frac{4}{9}.6 - \frac{1}{9}\left(z(1+x^2)+x(1+y^2)+y(1+z^2)\right)$<br>$\geq \frac{8}{3} - \frac{1}{9}\left(\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{2} + \frac{(1+y^2)(1+x^2)}{2} + \frac{(1+z^2)(1+y^2)}{2}\right)$<br>$= \frac{8}{3} - \frac{1}{18}\left(3+2(x^2+y^2+z^2)+(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\right)$<br>$\geq \frac{8}{3} - \frac{1}{18}\left(3+6+\frac{1}{3}(x^2+y^2+z^2)^2\right) = 2$<br>Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x=y=z=1.<br>Vậy minP=2. | ***1,0*** |

| | | |
|---|---|---|
| | | |
| ***Câu III.1*** <br>*(1  điểm)* | <br><br>a) Vì đường tròn (K) tiếp xúc với $AI$ nên $AI^2 = AB.AP$. Tương tự $AI^2 = AC.AQ$.<br>Do đó $AC.AQ = AB.AP$. Vậy tứ giác BPQC nội tiếp. (Chú ý cần chứng minh lại các tính chất phương tích) | ***1,0*** |
| ***Câu III.2*** <br>*(1 điểm)* | b) Ta có<br>$\widehat{BPI}=180^0-\widehat{AIB}=180^0-\left(90^0+\frac{\widehat{ACB}}{2}\right)=90^0-\frac{\widehat{ACB}}{2}=\frac{180^0-\widehat{ACB}}{2}=\frac{\widehat{BPQ}}{2}$<br>Suy ra $PI$ là phân giác ngoài $\widehat{BPQ}$. Mà AI là phân giác $\widehat{PAQ}$. Do đó I là tâm đường tròn bàng tiếp tam giác APQ. Vậy $PQ$ tiếp xúc với đường tròn (I). | ***1,0*** |
| ***Câu III.3*** | Gọi $G$ là giao điểm của $EL$ và $FK$. | ***1,0*** |

| | | |
|---|---|---|
| *(1 điểm)* | Ta có $\widehat{BKP}=2\widehat{BIP}=2\left(\widehat{AIB}-\widehat{AIP}\right)=2\left(90^0+\frac{\widehat{ACB}}{2}-\frac{\widehat{ABC}}{2}\right)=180^0+\widehat{ACB}-\widehat{ABC}$<br><br>Chứng minh tương tự $\widehat{QLC}=180^0+\widehat{ACB}-\widehat{ABC}$ .Vậy $\widehat{BKP}=\widehat{QLC}$ . Mà 2 tam giác $BKP,QLC$ đều là các tam giác cân. Do đó $\Delta BKP\sim\Delta QLC$ .<br><br>Lại có, theo chứng minh phần b), $\widehat{FIP}=90^0-\widehat{FPI}=\frac{\widehat{ACB}}{2}$. Suy ra $\Delta FIP\sim\Delta ECI$ .<br>Do đó $FP.EC=IE.IF$ .<br>Chứng minh tương tự $EQ.FB=IE.IF$ . Vậy $\frac{FB}{FP}=\frac{EC}{EQ}$.<br>Suy ra $\Delta KFB\sim\Delta LEC$ .<br>Lại có $EF//KL$ (cùng vuông góc với $AI$ )<br>Do đó ta có $\frac{FG}{FB}=\frac{FG}{FK}.\frac{FK}{FB}=\frac{EG}{EL}.\frac{EL}{EC}=\frac{EG}{EC}$.<br>Mặt khác $\widehat{BFG}=180^0-\widehat{BFK}=180^0-\widehat{LEC}=\widehat{GEC}$ , suy ra $\Delta GFB\sim\Delta GEC$ .<br>Do đó $\widehat{GBF}=\widehat{GCE}$ . Vậy G thuộc đường tròn $\left(ABC\right)$. | |
| **Câu IV**<br>*(1 điểm)* | Sau mỗi lần thay đổi, các số luôn giữ nguyên tính chẵn lẻ. Do đó không thể có toàn bộ các số là 2023. | ***1,0*** |