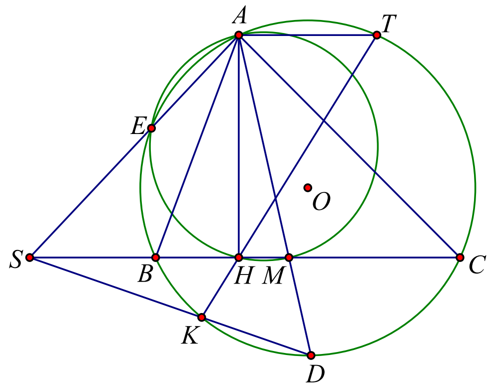
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đáp án gồm 02 trang

ĐÁP ÁN KỲ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM 2024
LẦN 3
Môn thi: TOÁN
(Dùng cho thí sinh thi thử vào Chuyên Toán, Tin)

Câu	**Nội dung**	**Thang điểm**
Câu 1		**2,5**
1	Cho A là số chính phương có chữ số tận cùng là 1. Tìm số dư khi chia A cho 40.	**1,5**
	Do A tận cùng bởi 1 nên A lẻ. Do đó $A = (2a+1)^2 = 4a(a+1) + 1 \ (a \in \mathbb{N})$. Do $a, a+1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên $a(a+1) \vdots 2$. Suy ra $A \equiv 1 \ (mod\ 8)$.	**1,0**
	Do A tận cùng là 1 nên $A \equiv 1 \ (mod\ 5)$. Suy ra $A - 1$ chia hết cho $8 \times 5 = 40$. Vậy A chia cho 40 dư 1.	**0,5**
2	Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên $n > 2$, giữa n và $n!$ có ít nhất một số nguyên tố.	**1,0**
	Xét số $A = n! - 1$. Dễ thấy $n < A < n!$. Nếu A là số nguyên tố thì ta có đpcm.	**0,5**
	Nếu A là hợp số thì A có ước nguyên tố p. Dễ thấy $p < n!$. Do $(p; n!) = 1$ nên $p > n$. Vậy giữa n và $n!$ có số nguyên tố p.	**0,5**
Câu 2	Xét phương trình bậc hai: $x^2 + 2ax + b = 0$, trong đó a, b là các số nguyên. Biết phương trình có nghiệm $x_1 = 2023 + \sqrt{2024}$.	**2,5**
1)	Chứng minh phương trình còn có nghiệm $x_2 = 2023 - \sqrt{2024}$	**1,0**
	Ta có: $\left(2023 + \sqrt{2024}\right)^2 + 2a.\left(2023 + \sqrt{2024}\right) + b = 0$ $\Leftrightarrow 2(a + 2023).\sqrt{2024} = -(2023^2 + 4046a + 2024 + b)$	**0,25**
	Nếu $a \neq -2023$ thì $\sqrt{2024} = -\dfrac{2023^2 + 4046a + 2024 + b}{2(a + 2023)} \in \mathbb{Q}$, vô lí. Suy ra $a = -2023, b = 2023^2 - 2024$.	**0,5**
	Áp dụng định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = -2a = 4046 \Longrightarrow x_2 = 4046 - x_1 = 2023 - \sqrt{2024}$.	**0,25**
2)	Chứng minh $S = x_1^{2024} + x_2^{2024}$ là một số nguyên chẵn	**1,5**
	Đặt $S_n = x_1^n + x_2^n \ (n \geq 0)$. Ta có $\begin{cases} x_1^2 + 2ax_1 + b = 0 \\ x_2^2 + 2ax_2 + b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1^{n+2} + 2ax_1^{n+1} + bx_1^n = 0 \\ x_2^{n+2} + 2ax_2^{n+1} + bx_2^n = 0 \end{cases}$ Suy ra: $S_{n+2} += 0, \forall n \geq 0$.	**0,5**
	Ta có: $S_0 = 2, S_1 = x_1 + x_2 = -2a$. Suy ra $S_2 = -(2a.S_1 + b.S_0) \in \mathbb{Z}$. Lập luận tương tự ta có: $S_3, S_4, \dots, S_{2024} \in \mathbb{Z}$. Vậy $S = S_{2024}$ là một số nguyên.	**0,5**
	Do b là số lẻ nên $S_{n+2} = -(2a.S_{n+1} + b.S_n) \equiv S_n \ (mod\ 2), \forall n \geq 0$. Suy ra $S = S_{2024} \equiv S_0 \equiv 0 \ (mod\ 2)$. Vậy S là một số chẵn.	**0,5**
Câu 3	Cho $0 \leq x, y \leq 1$ và $\frac{x}{\sqrt{y+3}} + \frac{y}{\sqrt{x+3}} = 1$. Tính $T = (x-1)^{2024} + (y-1)^{2024}$.	**1,0**
	Đặt $\sqrt{x+3} = a, \sqrt{y+3} = b \ \left(\sqrt{3} \leq a, b \leq 2\right)$. Ta có $\dfrac{a^2 - 3}{b} + \dfrac{b^2 - 3}{a} = 1 \Leftrightarrow a^3 - 3a + b^3 - 3b = ab \ (1)$	**0,5**

	Ta có $(a-2)(b-2) \ge 0 \Rightarrow ab \ge 2(a+b)-4$. Do đó $2(a+b)-4 \le a^3-3a+b^3-3b$ $\Leftrightarrow (a-2)(a^2+a-1)+(b-2)(b^2+b-1) \ge 0.$ Suy ra $a=b=2$. Với $a=b=2$ ta có $x=y=1$. Do đó $T=0$.	**0,5**
	NX: Có thể sử dụng phương pháp làm trội mẫu. Ta có $x+3=x+2+1 \ge x^2+2xy+y^2=(x+y)^2.$ Tương tự, $y+3 \ge (x+y)^2$. Do đó $\dfrac{x}{\sqrt{y+3}}+\dfrac{y}{\sqrt{x+3}} \le \dfrac{x}{x+y}+\dfrac{y}{x+y}=1.$ Dấu bằng xảy ra khi $x=y=1$. Từ đó có $T=0$.	
Câu 4		**3,0**
a)	Chứng minh $SH.SM=SB.SC$.	**1,0**
	Xét đường tròn đường kính AM, ta có: $\widehat{EAH}=\widehat{EMH}.$ Suy ra $\Delta SAH \sim \Delta SME$ $(g-g)$. Do đó $\dfrac{SA}{SM}=\dfrac{SH}{SE} \Rightarrow SH.SM=SA.SE.$ Xét đường tròn (O), ta có: $\widehat{EAB}=\widehat{ECB}$. Suy ra $\Delta SAB \sim \Delta SCE$ $(g-g)$. Do đó $\dfrac{SA}{SC}=\dfrac{SB}{SE} \Rightarrow SA.SE=SB.SC.$ Vậy, $SH.SM=SB.SC$.  	**0,5** **0,5**
b)	Chứng minh tứ giác MHKD nội tiếp	**1,0**
	Chứng minh tương tự câu a ta có: $SB.SC=SK.SD$. Suy ra, $SH.SM=SK.SD$.	**0,5**
	Suy ra $\Delta SHK \sim \Delta SDM$. Do đó $\widehat{SHK}=\widehat{SDM}$. Vậy tứ giác MHKD nội tiếp.	**0,5**
c)	Tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MHKD chạy trên một đường thẳng cố định	**1,0**
	Từ câu b ta có: $\widehat{SHK}=\widehat{SDM}$. Gọi T là giao điểm thứ hai của HK với đường tròn (O), ta có $\widehat{ADK}=\widehat{ATK}$. Do đó, $\widehat{ATH}=\widehat{BHK}=\widehat{THC}$. Suy ra $AT \parallel BC$.	**0,5**
	Suy ra T cố định và do đó K cố định. Vậy, tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác MHKD chạy trên đường trung trực của HK cố định.	**0,5**
Câu 5	Có 45 học sinh đứng thành một vòng tròn. Giả sử mỗi em có một số kẹo sao cho số kẹo của các em không đồng thời bằng nhau. Thực hiện trò chơi sau: Sau mỗi hiệu lệnh của người điều khiển, mỗi em đều lấy một nửa số kẹo của mình có đưa cho bạn bên cạnh tính theo chiều kim đồng hồ (Nếu em nào có số kẹo là một số lẻ thì được nhận thêm 1 chiếc kẹo từ người điều khiển trước khi chia). Chứng minh rằng, tồn tại một thời điểm mà số kẹo của các em đều bằng nhau.	**1,0**
	Giả sử sau lần chia thứ n, số kẹo của các em lần lượt là $a_1(n), a_2(n), \dots, a_{45}(n)$. Xét tích $T(n)=a_1(n).a_2(n)\dots.a_{45}(n)$. Dễ thấy $T(n) \le (M+1)^{45}, \forall n$, trong đó M là số kẹo lớn nhất mà một học sinh có được ban đầu.	**0,5**
	Mặt khác $T(n+1) \ge \dfrac{a_1(n)+a_2(n)}{2}.\dfrac{a_2(n)+a_3(n)}{2}\dots\dfrac{a_{45}(n)+a_1(n)}{2} \ge T(n), \forall n$ Dấu bằng xảy ra khi $a_1(n), a_2(n), \dots, a_{45}(n)$ đều chẵn và $a_1(n)=a_2(n)=\cdots=a_{45}(n).$ Nếu không có thời điểm nào mà số kẹo của các em học sinh bằng nhau thì $T(n)$ tăng tới vô hạn, trái với giả thiết $T(n)$ bị chặn trên bởi $(M+1)^{45}$.	**0,5**

-------------------------------Hết-------------------------------