

Đề thi gồm có: 01 trang

Thời gian làm bài: 90 phút

(không kể thời gian phát đề)

Họ và tên thí sinh:

Số báo danh:

Câu 1 (2 điểm). Cho biểu thức $A = \frac{2\sqrt{x} - 9}{x - 5\sqrt{x} + 6} - \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2} - \frac{2\sqrt{x} + 1}{3 - \sqrt{x}}$ với điều kiện $x \geq 0, x \neq 4, x \neq 9$.

1.1) Chứng minh rằng $A = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 3}$.

1.2) Tìm tất cả các số tự nhiên x thỏa mãn $A < -1$.

Câu 2 (2 điểm).

2.1) Một người gửi tiền vào ngân hàng với lãi suất 0,45%/tháng. Biết rằng, nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Người đó phải gửi số tiền ban đầu ít nhất bao nhiêu triệu đồng để số tiền lãi của tháng thứ hai không ít hơn 500 000 đồng? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của triệu đồng).

2.2) Tìm tất cả các số thực m để hai đồ thị hàm số $y = 2x^2$ và $y = mx + 2$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $(y_1 + 2)(y_2 + 2) + 25x_1x_2 = 0$.

Câu 3 (2 điểm).

3.1) Giải phương trình $2x^3 + 12x^2 + 30x + 25 = 0$.

3.2) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} xy + 2 + 2x = 3y \\ x^2 y^2 + 4 + 2xy = 3y^2. \end{cases}$$

Câu 4 (3 điểm). Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung BC cố định ($BC < 2R$). Điểm A chuyển động trên cung lớn BC sao cho $AB < AC$, tam giác ABC nhọn và không là tam giác cân. Các tiếp tuyến tại B và C của đường tròn $(O; R)$ cắt nhau tại K . Đường thẳng qua điểm K song song với AB cắt cạnh AC tại I . Đoạn thẳng KI cắt đường tròn $(O; R)$ tại D . Chứng minh rằng

4.1) Tứ giác $KOIC$ nội tiếp một đường tròn.

4.2) $\widehat{ABC} = \widehat{KOI}$.

4.3) Giá trị của biểu thức $IA \cdot IC + IO^2$ không phụ thuộc vào vị trí điểm A .

Câu 5 (1 điểm).

Cho các số nguyên dương x, y thay đổi thỏa mãn $3x + 4y = 2025$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = xy$.

.....Hết.....

ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM 2024 – LẦN 3

BÀI THI MÔN 2: Môn Toán chung

Câu	Đáp án	Điểm
1.1 1 điểm	$A = \frac{2\sqrt{x}-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$	0,25
	$A = \frac{2\sqrt{x}-9 - (\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3) + (\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
	$A = \frac{2\sqrt{x}-9 - (x-9) + (2x-3\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{x-\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)}$	0,25
	$A = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-3)} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3}$	0,25
1.2 1 điểm	$A < -1 \Leftrightarrow A+1 < 0, A+1 = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-3} = \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3}$	0,25
	Vì $\sqrt{x}-3 < 2\sqrt{x}-2$ nên $\frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-3} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-3 < 0 \\ 2\sqrt{x}-2 > 0 \end{cases}$	0,25
	$\begin{cases} \sqrt{x}-3 < 0 \\ 2\sqrt{x}-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} < 3 \\ \sqrt{x} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 9 \\ x > 1 \end{cases}$	0,25
	Kết hợp với điều kiện, ta có tập hợp các giá trị x thỏa mãn là $\{2; 3; 5; 6; 7; 8\}$.	0,25
2.1 1 điểm	Giả sử x là số tiền gửi ban đầu ($x > 0$, đơn vị là đồng). Số tiền lãi của tháng đầu tiên là $\frac{0,45}{100}x = 0,0045x$ (đồng). Tổng số tiền người gửi có được sau tháng đầu tiên là $x+0,0045x=1,0045x$ (đồng). Số tiền lãi của tháng thứ hai là $\frac{0,45}{100} \cdot 1,0045x = 0,00452025x$ (đồng).	0,25
	Ta có $0,00452025x \geq 500\,000$	0,25
	$x \geq \frac{500\,000}{0,00452025}$	0,25
	Vì $\frac{500\,000}{0,00452025} \approx 110\,613\,351$ nên đáp số cần tìm là 111 triệu đồng.	0,25
2.2 1 điểm	Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và parabol. $2x^2 = mx + 2 \Leftrightarrow 2x^2 - mx - 2 = 0$ $\Delta = m^2 + 16 > 0$, phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt, suy ra hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm A($x_1; y_1$) và B($x_2; y_2$) phân biệt.	0,25
	Theo định lí Vi-ét $x_1 + x_2 = \frac{m}{2}, x_1 x_2 = -1$.	0,25

	$y_1 = 2x_1^2 = mx_1 + 2, y_2 = 2x_2^2 = mx_2 + 2.$ $y_1 y_2 = 4(x_1 x_2)^2 = 4, y_1 + y_2 = m(x_1 + x_2) + 4 = \frac{m^2}{2} + 4.$ $\Rightarrow (y_1 + 2)(y_2 + 2) + 25x_1 x_2 = y_1 y_2 + 2(y_1 + y_2) + 4 + 25x_1 x_2 = m^2 - 9.$	0,25
	$(y_1 + 2)(y_2 + 2) + 25x_1 x_2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3.$	0,25
3.1 1 điểm	$2x^3 + 12x^2 + 30x + 25 = 0$ $\Leftrightarrow 10x^3 + 60x^2 + 150x + 125 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 8x^3 + 60x^2 + 150x + 125 = -2x^3$ $\Leftrightarrow (2x + 5)^3 = -2x^3$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x + 5 = \sqrt[3]{-2x}$	0,25
	$\Leftrightarrow x = \frac{5}{\sqrt[3]{-2} - 2}.$	0,25
3.2 1 điểm	Nhận xét: $y = 0$ không thỏa mãn. Xét $y \neq 0$, ta có $\begin{cases} x + \frac{2}{y} + x \cdot \frac{2}{y} = 3 \\ x^2 + \left(\frac{2}{y}\right)^2 + x \cdot \frac{2}{y} = 3. \end{cases}$	0,25
	$\Rightarrow x^2 + \left(\frac{2}{y}\right)^2 + 2x \cdot \frac{2}{y} + \left(x + \frac{2}{y}\right) = 6 \Rightarrow \left(x + \frac{2}{y}\right)^2 + \left(x + \frac{2}{y}\right) - 6 = 0$ $\Rightarrow x + \frac{2}{y} = 2 \text{ hoặc } x + \frac{2}{y} = -3.$	0,25
	Xét $x + \frac{2}{y} = 2$, ta có $x \cdot \frac{2}{y} = 1$. Suy ra $x, \frac{2}{y}$ là hai nghiệm của phương trình $X^2 - 2X + 1 = 0, X_1 = X_2 = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{y} = 1 \Rightarrow (x; y) = (1; 2).$	0,25
	Xét $x + \frac{2}{y} = -3$, ta có $x \cdot \frac{2}{y} = 5$. Suy ra $x, \frac{2}{y}$ là hai nghiệm của phương trình $X^2 + 3X + 5 = 0, \Delta < 0, \text{ vô nghiệm. Kết luận } (x; y) = (1; 2).$	0,25
4.1 1 điểm	Theo tính chất tiếp tuyến ta có: $\widehat{KOC} = \widehat{KOB} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}.$	0,25

	Mặt khác $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$ (liên hệ giữa góc ở tâm và góc nội tiếp).		0,25	
	$\widehat{BAC} = \widehat{KIC}$ (hai góc đồng vị).		0,25	
	Suy ra $\widehat{KOC} = \widehat{KIC}$. Vậy tứ giác KOIC nội tiếp.		0,25	
4.2 1 điểm	Vẽ tia Cx là tia đối của tia CK, ta có $\widehat{ACx} = \widehat{ABC} = \frac{1}{2}sd\widehat{AC}$.		0,25	
	Do tứ giác KOIC nội tiếp nên $\widehat{KOI} = \widehat{ICx} = 180^\circ - \widehat{ICK}$.		0,25	
	Mặt khác $\widehat{ACx} = \widehat{ICx}$.		0,25	
	Suy ra $\widehat{ABC} = \widehat{KOI}$.		0,25	
4.3 1 điểm	Gọi giao điểm thứ hai của tia DI và đường tròn là E.		0,25	
	Ta có $\widehat{KIO} = \widehat{KCO} = 90^\circ$, suy ra $DE \perp OI$, vì vậy $ID = IE$		0,25	
	$\Delta IAE \sim \Delta IDC$ (g-g). Suy ra $\frac{IA}{ID} = \frac{IE}{IC} \Rightarrow IA \cdot IC = ID \cdot IE = ID^2$.		0,25	
	Ta có $\widehat{KIO} = \widehat{KCO} = 90^\circ \Rightarrow ID^2 + IO^2 = OD^2 = R^2$. $\Rightarrow IA \cdot IC + IO^2 = R^2$.		0,25	
5 1 điểm	$3x + 4y = 2025 \Rightarrow x = \frac{2025 - 4y}{3} \Rightarrow P = \frac{2025 - 4y}{3} \cdot y = \frac{-1}{3}(4y^2 - 2025y)$.		0,25	
	$P = \frac{-4}{3}\left(y - \frac{2025}{8}\right)^2 + \frac{2025^2}{48} = \frac{-4}{3} y - 253,125 ^2 + \frac{2025^2}{48}$.		0,25	
	$x = 675 - y - \frac{y}{3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow y:3$.			0,25
	Trên trục số biểu diễn tập hợp các số thực, 253,125 nằm giữa hai bội số liên tiếp của 3 là 252 và 255.			0,25
	Nếu $y=252$ thì $P = \frac{-4}{3} 252 - 253,125 ^2 + \frac{2025^2}{48} = \frac{-4}{3} \cdot 1,125^2 + \frac{2025^2}{48} = 85428$.			0,25
	Nếu $y=255$ thì $P = \frac{-4}{3} 255 - 253,125 ^2 + \frac{2025^2}{48} < \frac{-4}{3} \cdot 1,125^2 + \frac{2025^2}{48} = 85428$.			0,25
Nếu $y < 252$ thì $P < \frac{-4}{3} 252 - 253,125 ^2 + \frac{2025^2}{48} = 85428$.			0,25	
Nếu $y > 255$ thì $P < \frac{-4}{3} 255 - 253,125 ^2 + \frac{2025^2}{48} < \frac{-4}{3} \cdot 1,125^2 + \frac{2025^2}{48} = 85428$.			0,25	
P đạt giá trị lớn nhất bằng 85 428 khi $y = 252, x = 339$.				