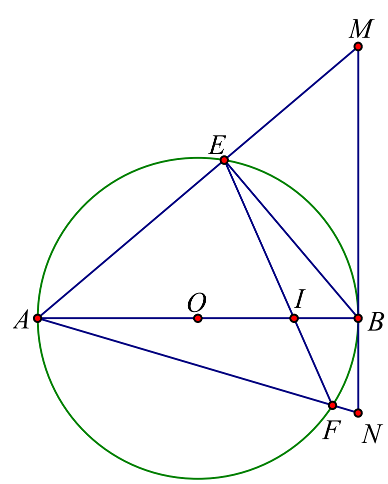
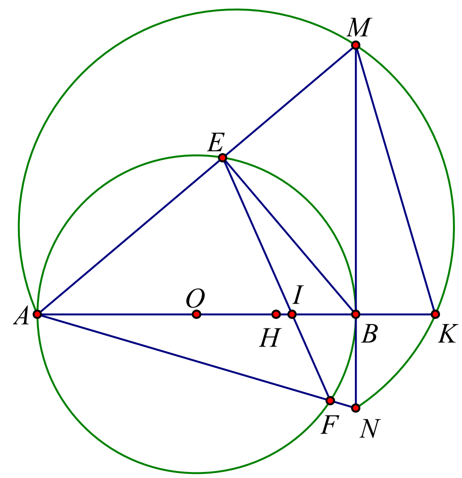
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

Đáp án gồm 03 trang

ĐÁP ÁN KỲ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM 2023
LẦN 3
Môn thi: TOÁN
(Dùng cho thí sinh thi thử vào Chuyên Toán, Tin)

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Nội dung</th><th>Thang điểm</th></tr>
<tr><td>Câu 1</td><td>Cho ba phương trình
$$x^2 - ax + 1 = 0\ (1),\qquad x^2 - bx + 1 = 0\ (2),\qquad x^2 - cx + 1 = 0\ (3).$$</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta có: $x_1^2 - ax_1 + 1 = 0, x_2^2 - bx_2 + 1 = 0, (x_1x_2)^2 - c(x_1x_2) + 1 = 0$. Suy ra
$$a = x_1 + \frac{1}{x_1},\qquad b = x_2 + \frac{1}{x_2},\qquad c = x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2}.$$</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta có
$$ab = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = c + \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$$
$$\Rightarrow abc = c^2 + \left(x_1x_2 + \frac{1}{x_1x_2}\right)\left(\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}\right) = c^2 + x_1^2 + \frac{1}{x_1^2} + x_2^2 + \frac{1}{x_2^2}$$
$$= c^2 + a^2 - 2 + b^2 - 2.$$
Suy ra $T = 4$.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td>Câu 2</td><td></td><td>2,5</td></tr>
<tr><td>1)</td><td>Giải hệ
$$\begin{cases} x\left(\sqrt{y+4} + \sqrt{y+11}\right) = 35 \\ y\left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11}\right) = 35. \end{cases}$$</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td></td><td>ĐK : $x, y > 0$. Hệ đã cho tương đương với
$$\begin{cases} x = 5\left(\sqrt{y+11} - \sqrt{y+4}\right) \\ y = 5\left(\sqrt{x+11} - \sqrt{x+4}\right) \end{cases}$$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Trừ theo từng vế hai phương trình của hệ ta được
$$x - y = 5\left(\sqrt{x+4} - \sqrt{y+4}\right) - 5\left(\sqrt{x+11} - \sqrt{y+11}\right)$$
$$\Leftrightarrow x - y = 5\frac{x-y}{\sqrt{x+4} + \sqrt{y+4}} - 5\frac{x-y}{\sqrt{x+11} + \sqrt{y+11}}$$
$$\Leftrightarrow (x-y)\left(1 - \frac{5}{\sqrt{x+4} + \sqrt{y+4}} + \frac{5}{\sqrt{x+11} + \sqrt{y+11}}\right) = 0\ \ (1)$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Từ hệ đã cho suy ra x, y không đồng thời nhỏ hơn 5. Do đó
$$\frac{5}{\sqrt{x+4} + \sqrt{y+4}} - \frac{5}{\sqrt{x+11} + \sqrt{y+11}} < \frac{5}{\sqrt{x+4} + \sqrt{y+4}} < \frac{5}{3+2} = 1.$$
Từ (1) suy ra $x = y$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Với $x = y$ ta có: $x\left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11}\right) = 35\ (2)$.
Xét $f(x) = x\left(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11}\right)$, ta có $f(5) = 35$. Nếu $x > 5$ thì $f(x) > f(5) = 35$.</td><td></td></tr>
</table>

	Nếu $x < 5$ thì $f(x) < f(5) = 35$. Do đó, phương trình (2) có nghiệm duy nhất $x = 5$. Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x = y = 5$.	**0,5**
2)	Chứng minh: $(z+x-y)x^5+(x+y-z)y^5+(y+z-x)z^5 \geq 0$.	**1,0**
	Đpcm tương đương với $$x^6+y^6+z^6-x^5y-y^5z-z^5x+x^5z+y^5x+z^5y \geq 0$$ $$\Leftrightarrow \sum\left(x^6+y^6-2x^5y+2y^5x\right) \geq 0$$	**0,5**
	$$\Leftrightarrow \sum\left(x^2+y^2\right)\left(x^2-y^2-xy\right)^2 \geq 0 : \text{đúng}$$	**0,5**
Câu 3	Chứng minh rằng, tồn tại vố số bộ ba số nguyên dương $(x; y; z)$ thoả mãn $$x^{31}+y^5=z^{2023}$$	**1,5**
	Xét $x = 2^{5m}, y = 2^{31m}$ $(m \in \mathbb{Z}^+)$. Khi đó: $x^{31}+y^5 = 2^{155m+1}$. Ta cần chọn m sao cho $$155m+1 = 2023n \ (n \in \mathbb{Z}^+) \ \ (1).$$ Khi đó $z = 2^n$.	**0,75**
	Từ (1) suy ra $8n-1$ chia hết cho 155. Đặt $8n-1 = 155k$ $(k \in \mathbb{Z}^+)$ ta có: $$3k+1 \vdots 8 \Leftrightarrow 9k+3 \vdots 8 \Leftrightarrow k+3 \vdots 8.$$ Đặt $k+3 = 8u$ $(u \in \mathbb{Z}^+)$, ta có $$n = 155u-58, m = 2023u-757.$$ Như vậy, tất cả các bộ $x = 2^{5(2023u-757)}, y = 2^{31(2023k-757)}, z = 2^{155u-}$ với $u \in \mathbb{Z}^+$ đều là nghiệm của phương trình đã cho.	**0,75**
Câu 4		**3,0**
a)	Chứng minh tứ giác MNFE nội tiếp	**1,0**
	Xét đường tròn (O): Do AB là đường kính nên $\widehat{AEB} = \widehat{AFB} = 90^o$. Ta có $$\widehat{AFE} = \widehat{ABE} = \widehat{AMB} \left(= 90^o - \widehat{MBE}\right)$$ Suy ra tứ giác MNFE nội tiếp.  	**1,0**
b)	Chứng minh đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định	**2,0**
	Chứng minh: $BM.BN = BH.BA = R^2$.	**0,5**
	Gọi K là giao điểm thứ hai của đường tròn (AMN) với đường thẳng AB. Chứng minh $$BA.BK = BM.BN = R^2$$	**0,5**

<table>
<tr><td></td><td>Suy ra K cố định</td><td rowspan="3">
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Gọi $I = EF \cap AB$. Do tứ giác MNFE nội tiếp nên
$$\widehat{AEI} = \widehat{ANM} = \widehat{AKM}.$$
Suy ra tứ giác MEIK nội tiếp.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Chứng minh:
$$AI.AK = AE.AM = AB^2 = 4R^2.$$
Suy ra I cố định.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2"></td><td></td></tr>
<tr><td>Câu 5</td><td colspan="2">Có 2023 viên bi đựng trong 14 cái hộp. Mỗi lần cho phép lấy hai viên bi ở hai hộp nào đó và bỏ vào một trong 12 hộp còn lại. Chứng minh rằng sau một số bước có thể bỏ hết bi vào một hộp.</td><td>1,0</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Ta chứng minh bài toán tổng quát với m viên bi và n cái hộp $(m, n \geq 4)$. Quy nạp theo m:
Với $m = 4$: Số bi thuộc một trong các dạng sau:
$$(1; 1; 1; 1; 0; \dots; 0),\ (1; 2; 1; 0; 0; \dots; 0),$$
$$(2; 2; 0; 0; 0; \dots; 0), (1; 3; 0; 0; 0; \dots; 0), (4; 0; 0; 0; \dots; 0)$$
Thực hiện như sau:
$$(1; 1; 1; 1) \to (3; 1; 0; 0) \to (2; 0; 2; 0) \to (1; 0; 1; 2) \to (0; 0; 0; 4).$$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Giả sử bài toán đúng với mọi $m \leq k$. Xét với $m = k + 1$: Đưa về trường hợp
$$(1; k; 0; 0; \dots; 0)$$
Sau đó thực hiện như sau:
$$(1; k; 0; 0; \dots; 0) \to (0; k-1; 2; 0; \dots; 0) \to (0; k-2; 1; 2; 0; \dots; 0)$$
$$\to (2; k-3; 0; 2; 0; \dots; 0) \to (1; k-1; 0; 1; 0; \dots; 0)$$
$$\to (0; k+1; 0; 0; \dots; 0)$$</td><td>0,5</td></tr>
</table>

------------------------------Hết------------------------------