

Một số nhận xét và lưu ý với việc làm đề thi thử lần 3

Môn Toán chuyên

Câu 1. Trong bài toán này: các bạn phải đưa ra được nhận xét $x_1, \frac{1}{x_1}$ là hai nghiệm của phương trình $x^2 - ax + 1 = 0$. Từ đó sử dụng định lý Viet biểu diễn hệ số a theo x_1 . Tương tự: b biểu diễn được theo x_2 và c theo x_1x_2 . Khi đó việc chứng minh đẳng thức như yêu cầu của đề bài sẽ trở lên đơn giản.

Do khai triển hằng đẳng thức hoặc khi biến đổi rút gọn, khá nhiều bạn tính toán sai, dù hướng làm là đúng. Một số bạn sai lầm khi nhầm lẫn rằng các biệt thức của phương trình (1), (2) phải bằng 0 hoặc hiểu nhầm x_1, x_2 là các số nguyên để suy ra $x_1 = \pm 1$.

Câu 2. Đối với ý thứ nhất: Ở đây là sử dụng phương pháp liên hợp để nhóm ra nhân tử chung $x - y$. Sau khi được $y = x$, ta đưa về phương trình có thể lập luận bằng cách sử dụng bất đẳng thức, hoặc lập luận dựa trên tính đồng biến nghịch biến hoặc sử dụng phép liên hợp.

Khá nhiều bạn làm sai do vận dụng cách lập luận thông thường khi giải hệ đối xứng loại II: xét $x > y$ và $x < y$. Nói chung ta không thể lập luận như này một cách trực tiếp từ hệ phương trình đã cho.

Đối với ý thứ hai của câu, đây là bài toán bất đẳng thức khó, ít bạn làm được. Nhiều bạn nhầm lẫn vai trò các biến như nhau, sử dụng bất đẳng thức AM-GM không đúng, hoặc nhầm lẫn đưa về chứng minh một bất đẳng thức không tương đương với bất đẳng thức đã cho.

Câu 3. Ý tưởng để giải bài toán này là sử dụng hằng đẳng thức: $2^a + 2^a = 2^{a+1}$, với mỗi số tự nhiên a . Khi đó, bài toán sẽ dẫn về việc chứng minh (hoặc có thể tìm tất cả) một phương trình Diophantine bậc nhất hai ẩn có vô số nghiệm.

Một hướng hơi khác, đó là chứng minh phương trình đã cho có 1

nghiệm, sau đó chỉ ra: nếu $(x_0; y_0; z_0)$ thoả mãn $x^{31} + y^5 = z^{2023}$ thì $(2^a x_0; 2^b y_0; 2^c z_0)$ cũng là nghiệm, với a, b, c sao cho $31a = 5b = 2023c$.

Câu 4. Ý thứ nhất của bài toán là chứng minh tứ giác nội tiếp dựa trên dấu hiệu nhận biết đơn giản về góc. Tuy vậy nhiều bạn làm quá phức tạp do cố gắng sử dụng "phương tích" để lập luận.

Với ý thứ hai, việc hiểu tốt tính chất của trực tâm một tam giác sẽ giúp ta dễ dàng tiếp cận bài toán. Các bạn đa phần sai lầm do dự đoán sai điểm cố định.

Câu 5. Chiến thuật ở đây là tìm cách dồn bi vào một hộp cố định nào đấy để đạt được trạng thái $(1; 2022; 0; \dots; 0)$. Từ đây, ta đưa ra cách đổi bi như sau

$$(1; 2022; 0; \dots; 0) \rightarrow (0; 2021; 2; \dots; 0) \rightarrow (2; 2020; 1; 0; \dots; 0) \\ \rightarrow (2; 2019; 0; 2; 0; \dots; 0) \rightarrow (1; 2021; 0; 1; 0; \dots; 0) \rightarrow (0; 2023; 0; \dots; 0).$$

Thông thường, các bài toán kiểu này hay yêu cầu chứng minh không thể đạt được một trạng thái nào đó, thông qua việc phát hiện các bất biến hoặc đơn biến. Câu hỏi của bài toán này là phải xây dựng được một chuỗi các phép đổi bi để đạt được trạng thái mong muốn, nó hơi khác với thông thường. Tuy vậy, một số bạn vẫn mang nguyên lập luận như khi không đạt được trạng thái sang: bằng cách chỉ ra các bất biến về tính chẵn lẻ. Cách này sẽ không giúp ích nhiều trong việc giải quyết bài toán.