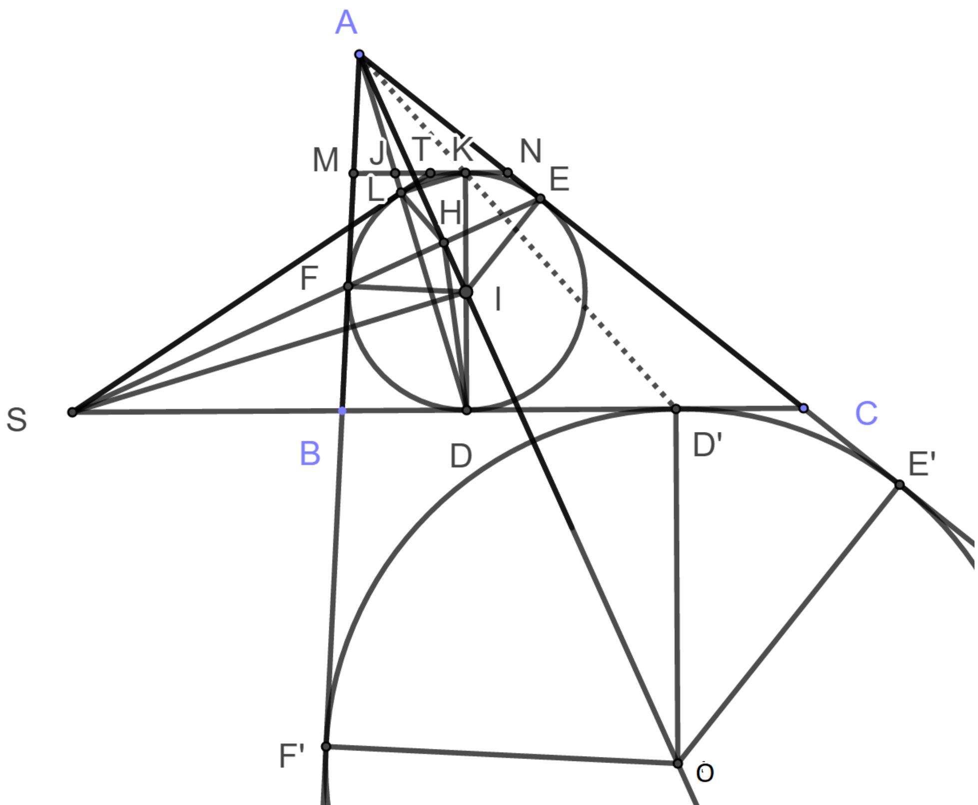
ĐÁP ÁN – THANG ĐIỂM KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN

NĂM 2022 – LẦN 1

BÀI THI MÔN TOÁN CHUYÊN

Câu	Ý	Nội dung	Điểm
1			***3***
	1		***1,5***
		Phương trình $x^3+x^2+x=-\frac{1}{2}(1+x^2)^2 \Leftrightarrow \frac{x^3+x^2+x}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow \frac{x(1+x^2)+x^2}{(1+x^2)^2}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{1+x^2}+(\frac{x}{1+x^2})^2=-\frac{1}{2}$	***1***
		Đặt $t=\frac{x}{1+x^2}$ ta có $t^2+t+\frac{1}{2}=0$. Phương trình này vô nghiệm nên phương trình đã cho vô nghiệm.	***0,5***
		Chú ý: Có thể đưa phương trình về dạng $x^4+2x^3+4x^2+2x+1=0$ Sau đó ghép thành $\left(x^2+x\right)^2+\left(x+1\right)^2+2x^2=0$ để suy ra phương trình vô nghiệm	
	2		***1,5***
		Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2+2xy+2y^2+3x=0 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases}$. Nhân phương trình thứ 2 với 2 sau đó cộng với phương trình đầu ta có $x^2+4xy+4y^2+3x+6y+2=0 \Leftrightarrow (x+2y)^2+3(x+2y)+2=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2y=-1 \\ x+2y=-2 \end{array}\right.$	***0,5***
		Vậy ta có $\begin{cases} x+2y=-1 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases}$ (1) hoặc $\begin{cases} x+2y=-2 \\ xy+y^2+3y+1=0 \end{cases}$ (2) Giải hệ (1) ta có hai cặp $(x;y)$ là $\left(-3-2\sqrt{2};1+\sqrt{2}\right),\left(-3+2\sqrt{2};1-\sqrt{2}\right)$. Giải hệ (2) ta có hai cặp $(x;y)$ là $(-3-\sqrt{5};\frac{1+\sqrt{5}}{2}),(-3+\sqrt{5};\frac{1-\sqrt{5}}{2})$	***1.0***

2			***3***
	1		***1,5***
		Phương trình đã cho tương đương với $x^2-(y+1)x+(y^2-y)=0$. Coi đây là phương trình bậc 2, ẩn x, ta có $\Delta=(y+1)^2-4(y^2-y)=4-3(y-1)^2$. Vì x nguyên nên Δ phải là số chính phương. Vì $\Delta\le 4$ nên từ các kết quả trên, ta có $\Delta=0,\Delta=1,\Delta=4$	***0.75***
		$\Delta=0$ vô lí. $\Delta=1\Rightarrow y=2$ hoặc $y=0$, từ đó ta có các cặp $(x;y)$ là $(1;2),(2;2),(0;0),(1;0)$ $\Delta=4\Rightarrow y=1$ từ đó ta có các cặp $(x;y)$ là $(0;1),(2;1)$. Thử lại cả 6 cặp nghiệm thỏa mãn. Vậy ta có 6 cặp $(x;y)$ là $(0;0),(2;2),(0;1),(1;0),(1;2),(2;1)$.	***0,75***
		Chú ý: Có thể đưa phương trình về dạng sau để giải $2x^2-2xy-2x+2y^2-2y=0\Leftrightarrow(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2=2$	
	2		***1,5***
		Gọi n là phần tử nhỏ nhất của A, vì $\left[\sqrt[3]{n}\right]+1\in A$ nên $\left[\sqrt[3]{n}\right]+1\ge n\Rightarrow\sqrt[3]{n}+1\ge n\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}+\dfrac{1}{n}\ge 1\Rightarrow n\in\{1;2\}$.	***0,5***
		Với a thuộc A thì $a^3+a^2+a+1\Rightarrow$ mà $a^3<a^3+a^2+a+1<(a+1)^3$ nên $\left[\sqrt[3]{a^3+a^2+a+1}\right]=a\Rightarrow a+1=\left[\sqrt[3]{a^3+a^2+a+1}\right]+1\in A$. Vậy ta có đúng hai tập thỏa mãn là $\{1;2;3;......\}$ và $\{2;3;4;....\}$.	***1,0***
3			***3***

<table>
<tr><td></td><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>1</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Ta có $AH.AI = AE^2; AL.AD = AE^2$ nên $LHID$ là tứ giác nội tiếp.
Từ đó $\widehat{LAH} = \widehat{IDL}$ mà $\widehat{IDL} = \widehat{ILD}, \widehat{ILD} = \widehat{IDH} \Longrightarrow \widehat{LHA} = \widehat{IHD}$ hay $\widehat{FHL} = \widehat{FHD}$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Do $SHID$ nội tiếp và $LHID$ nội tiếp, ta có $\widehat{SID} = \widehat{SHD} = \frac{1}{2}\widehat{LHD} = \frac{1}{2}\widehat{LID}$ hay IS là phân giác $\widehat{LID}$ hay $IS \perp LD$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td>2</td><td></td><td>1</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Ta dựng đường tròn (O) bàng tiếp góc A của tam giác ABC, (O) tiếp xúc BC, CA tại D', E' tương ứng.
Ta có $IK \parallel OD'$, đồng thời K, D' cùng thuộc một nửa mặt phẳng bờ AO nên A, K, D' thẳng hàng.
Ta có $CD' = CE' = AE' - AC = p - b = BD$ với p là nửa chu vi tam giác ABC và $b = CA$.</td><td>0.5</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>0.5</td></tr>
</table>

		$\frac{MJ}{BD}=\frac{AM}{AB};\frac{NK}{CD'}=\frac{AN}{AC};\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\Rightarrow\frac{MJ}{BD}=\frac{NK}{CD'}\Rightarrow MJ=NK$ hay $\frac{MJ}{NK}=1.$	
	3		***1.0***
		Ta có tam giác JLK vuông tại L Từ kết quả ở ý 1, ta có SL tiếp xúc với (I) tại $L.$ Tam giác DSL cân tại S nên tam giác JTL cân tại T . Từ hai kết quả trên, ta có T là trung điểm của JK . Vì $MJ=NK$ nên T cũng là trung điểm của MN . Do $MN \parallel BC$ nên AT luôn đi qua trung điểm của BC cố định.	
4			***1***
		Giả sử khẳng định của bài toán không đúng. Gọi X là tập các câu lạc bộ có không quá 63 học sinh nam; Y là tập các câu lạc bộ có ít nhất 64 học sinh nam. Như vậy, mỗi câu lạc bộ trong Y có không quá 63 học sinh nữ (theo giả thiết phản chứng) Ta gọi G là tập tất cả các bộ ba (B,G,C) với B,G,C tương ứng là một học sinh nam, một học sinh nữ, một câu lạc bộ bất kì trong trường mà B,G đều tham gia C . Vì có tất cả 2020.2020 cặp học sinh nam, nữ và mỗi cặp này tham gia vào cùng ít nhất 1 câu lạc bộ nên $\lvert G\rvert \ge 2020.2020$. (1)	***0.5***
		Ta đặt $A=\{(B,G,C):C\in X\},B=\{(B,G,C):C\in Y\}$. Dễ thấy $A\cap B=\varnothing,G=A\cup B\Rightarrow\lvert G\rvert=\lvert A\rvert+\lvert B\rvert$. (2) Với mỗi học sinh nữ G thì có không quá 16 câu lạc bộ $C\in X$ mà G tham gia vào và với mỗi câu lạc bộ $C\in X$ mà G tham gia vào thì lại có không quá 63 học sinh nam tham gia. Do đó $\lvert A\rvert\le 2020.16.63$ (3) Với mỗi học sinh nam B thì có không quá 16 câu lạc bộ $C\in Y$ mà B tham gia vào và với mỗi câu lạc bộ $C\in Y$ mà B tham gia vào thì lại có không quá 63 học sinh nữ tham gia. Do đó $\lvert B\rvert\le 2020.16.63$ (4) Từ (1),(2),(3),(4) ta có $2020.16.63.2\ge 2020.2020\Rightarrow 1008=16.63\ge 1010$, vô lí. Vậy điều phải chứng minh là đúng.	***0.5***